

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540251

研究課題名(和文)多様体上の解析学の研究

研究課題名(英文)Study of Analysis on Manifolds

研究代表者

古谷 賢朗 (FURUTANI, KENRO)

東京理科大学・理工学部・教授

研究者番号：70112901

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円、(間接経費) 1,140,000円

研究成果の概要(和文)：(1)2ステップコンパクトベキ零多様体上のサブラプラシアンの特異値関数は唯一つの単純極を持つ有理型関数に解析接続され、その留数公式とそれを体積で割った値は一樣離散部分群によらず一定の値をとること、極の位置を表す公式、負の整数はいつも零点になることを証明した。(2)球面の接束の自明な部分束で非ホロノミックの性質を持つ場合は3次元、7次元及び15次元に限ることを証明した。又対応するサブラプラシアン固有値、固有関数の決定を、7次元の場合の余次元3のサブラプラシアンの場合も含めて部分的に行った。(3)高次Grushin作用素の熱核構成のための作用関数の積分表示公式を得た。

研究成果の概要(英文)：(1) We proved that spectral zeta functions on compact nilmanifolds of 2 step are always analytically continued to a meromorphic function with only one simple pole, determined its location formula and gave the residue there together with the ratio by the volume being constant. Also was proved that at the negative integers the function always vanishes. (2) It was proved that among the spheres only on 3, 7 and 15 dimensional spheres, there exists a trivializable sub-Riemannian structure, especially on 15 dimensional sphere, it was shown that it is of codimension 7. We partly determined the eigenvalues and eigenfunctions for the corresponding sub-Laplacians, including the sub-Laplacian for the codimension 3 case on 7 dimensional sphere. (3) We constructed an action function for a higher step Grushin type operator with two variables in an integral form which is a first step for the construction of the heat kernel for this operator.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：sub-Laplacian sub-Riemann 構造 熱核 Spectral zeta 関数 ベキ零多様体 Grushin type 作用素 Clifford 代数 一般ハイゼンベルグタイプ群

1. 研究開始当初の背景

力学系の大域理論や、無限次元多様体の研究から始まり、多様体上の大域的解析現象の研究は、楕円型作用素の大域的研究を中心として 20 世紀後半、国内外を問わず数学研究の中で大きな話題であった。それは局所解析的な研究に始まり（更に擬微分作用素や Fourier 積分作用素も含めて）幾何学的大域解析的な研究が話題の中心になって行った。その研究は多様体論への応用から、数理物理学にわたり今後も多様体研究と解析学研究の大きなテーマである。

特に、指数定理や熱核漸近展開等に代表される楕円型作用素の不変量と位相不変量を関係を理論的付ける一連の結果は、物理学に於ける古典力学と量子力学の対応関係の観点から解釈することによって統一的に理論構造を理解出来る。

本研究はこの観点を基本指針にして、楕円型作用素から更に「劣楕円型作用素」（従って準楕円型作用素）の大域的研究を目指すものであるが、劣楕円型作用素の大域的研究は多様体の一般的な構造を反映したものではなく、個々の多様体のより詳しい構造（= sub-Riemann 構造）に基づき、従って位相的な性質の解析的手段を通じた現象の解明より、むしろ多様体の持つ特別な構造の解析的現象への反映の解明にある。

一般に多様体を物理系の形態空間と考えれば、物理系によってはどの状態からどの状態へも自由に移れる（= 数学的には smooth な測地線で結べると解釈する）とは限らないが、non-holonomic 系であれば紆余曲折はしてもどの状態にも行き着ける。このような物理系は、数学的には bracket generating な sub-bundle（non-holonomic 系）を持っている多様体のことであり、多様体の sub-Riemann 構造と呼んでいるが、非自明な sub-Riemann 構造を持つ多様体は限定されていて、sub-Riemann 構造と言ってもいろいろの段階があるが、このとき「sub-Laplacian」と言われる「劣楕円型の 2 階微分作用素」が存在する。これは Riemann 多様体の場合の Laplacian に対応する作用素である。

またある種の条件下、主束の底空間に Grushin type と呼んでいる劣楕円型作用素も構成出来る。これらの作用素が本研究の中心に位置し、楕円型作用素からは出てこなかった現象が多数明らかになるものと期待している。

2. 研究の目的

(1) 本研究は、sub-Riemann 構造の幾何学的研究

に基づく、sub-Laplacian 及び関連する劣楕円型作用素の熱核の構成・構造解明と、付随するスペクトルゼータ関数に関する大域解析学的研究であり、以前より継続している以下相互に関連する 3 つのテーマの研究を行うことを目的とした：

[A] ベキ零 Lie 群及びベキ零多様体の sub-Riemann 構造の研究と関連する準楕円型作用素のスペクトルゼータ関数の研究

[B] 球面及びコンパクト Lie 群の sub-Riemann 構造の研究と付随する sub-Laplacian、Grushin type 作用素の 2 重主束構造に基づく大域解析学的研究

[C] 幾何学的量子化と sub-Riemann 構造に関連する Töplitz 作用素の研究

(2) 以下 23 年度から 25 年度に解決を計画した具体的問題をいくつか詳しく説明する。

① 2-step compact ベキ零多様体のスペクトルゼータ関数はいつでも極がただ一つの有理型関数になると予想しているが（特別な場合には証明した）、一般的に証明する。

ここで現れるスペクトルゼータ関数は Riemann zeta 関数、Epstein zeta 関数 や Hurwitz zeta 関数を含むクラスの関数であり、解析的な新しい関係や関数等式の類似を得られるものと期待した。

② 更にその関係を用いて Kronecker の第二極限公式の拡張である zeta-regularized determinant の表示式を劣楕円型作用素の場合にも得るとともに、楕円型作用素では現れなかった古典的な積分で表される興味ある量に関連している様子を明らかにする。

③ 熱核は一般に、作用関数を特性多様体上での Fiber 積分として表されると考えられていて、作用関数と積分する際の体積要素の構成が課題であるが、作用関数を 2-step ベキ零 Lie 群の場合に構成するのに有効であった complex Hamilton-Jacobi method が 3-step の場合にも有効であるかを、3-step 2 変数 Grushin 作用素に対して検証する。

④ 2 重主束構造の視点から、sub-Laplacian と、Grushin type 作用素の関連性、構造群に付随するベクトル束に作用する楕円型作用素の可算族との関連性の研究を通じて、劣楕円型作用素に対する zeta-regularization の意味づけを行う。また S^2 上の spherical Grushin 作用素のスペクトルゼータ関数の解析接続公式を見つける。

⑤ 球面 S^{15} に余次元 7 の強い意味での sub-Riemann 構造が入るかについても解決する。

3. 研究の方法

(1) 本研究は理論研究なので、主に同じ方面の研究を行っている研究者との討議、連携研究者、共同研究者間の相互訪問及びアイデアの交換を通じて研究の発展をはかると同時に、世界の多くの研究者による関連する研究結果の注意深い検証を行う。理論研究の文献は単なるデータではないので実際に著者や共同研究者、また関連する研究者に出会うことにより、直接の討議を通じてアイデアの源が確認出来たり、今後の方向性も掴める。自らは、当然ではあるが一つの定理の証明を見つけ出すのにも computer では処理計算出来ない深い思考の積み重ねを行う。ネットワークの発達に伴い研究連絡や議論でさえが一昔前に比べれば容易に日常的に可能になったとはいえ、長期に亘るそれのみによる情報のやり取りには偏りがあり、様々なリスクを回避するためにも相互訪問しての研究打ち合わせは研究発展にとっては以前と変わり無く重要であると同時に、情報発信のためには国際会議等で研究発表も必要である。従って予算を伴う本研究計画・方法はそれらを実行するのに必要な旅費、謝金、サポート体制の構築が主であり、研究者間の交流を主とする必要最低限の研究経費である。

(2) 本研究の基礎となる Wolfram Bauer, Chisato Iwasaki 氏との共著論文「Spectral Analysis and Geometry of a sub-Laplacian and related Grushin type operator」(*Trends in Partial Differential Equations and Spectral Theory 183-290*, in the series “Advances in Partial Differential Equations”, Birkhäuser (2010)) で多くの事柄を展開したが、いずれも今後の研究の基礎をなす典型例を扱っている。そこでの方法を発展させ、一般の 2-step compact ベキ零多様体のスペクトルゼータ関数の解析接続公式を目標とした。

主となる方法は Beals-Gavaux-Greiner による熱核の具体的積分表示式であるが、ベキ零 Lie 群の lattice の分類問題についても同時に考察を進めるが、とりあえずのところは、標準的な lattice に parameter を考えたものを扱い、Selberg 跡公式、Mellin 変換、Fourier 変換や解析接続等と古典的特殊関数のいろいろな関係式を用い、sub-Laplacian の場合は場所ごとに違う熱核の small time asymptotics を調べ、lattice を持たない場合との違いを明確にする。又、「Zeta regularized Determinant of the Laplacian for classes of spherical space forms, *Journal of Geometry and Physics* (2008), Vol. 58,

No.2, 64-88, by W. Bauer and K. Furutani」で用いた “Egami-interpolation method” がここでも有効かを検証する。

S^{15} の強い意味での sub-Riemann 構造の存在問題は、Adams の定理による 8 個の一次独立線形ベクトル場を、 S^{15} が四元数体のテンソル積 $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ に入っているとして構成する方法と、Clifford 加群構造を比較する方法で Bracket generating property を示せる可能性を探ることを計画した。

(3) この 3 年間は上記に説明した事柄を中心に研究を始め、その解決をめざしたが、多くの関連する問題があり (特に下記研究成果 (5) は研究成果 (1) から派生した問題でもある) 26 年度以降にも研究を継続する。

4. 研究成果

(1) 主に、2 step compact nilmanifold 上の sub-Laplacian の spectral zeta 関数の研究を行なった。この場合の spectral zeta 関数は唯一の単純極を持つ有理型関数に解析接続され、その留数を体積で割った値は一樣離散部分群によらず一定の値をとること、極の位置を表す公式、負の整数はいつも零点になることを証明した。特別な場合について (6 次元自由巾零り一群)、sub-Laplacian を、その巾零多様体が torus を構造群とするある主束の全空間となる構造を利用し、底空間上の各指標に付随する直線束に作用する楕円型作用素の加算族へ分解される様子を具体的に記述した (Wolfram Bauer and Kenro Furutani and Chisato Iwasaki: Spectral zeta function of the sub-Laplacian on two step nilmanifolds, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, **97**, 242-261 (2012) に発表)。

これは各楕円型作用素の spectral zeta 関数は極が加算個あっても加算和を考えればすべて打ち消し合い新たな極が一つ出来る現象であり、zeta 正則化行列式が劣楕円型に対しても定義でき、個々の zeta 正則化行列式の加算積に対する正則化と考えられる現象であり、今後更に一般化を研究する予定である (典型例について「Second regularization of zeta-determinants for an infinite family of elliptic operators」, 2012 International conference on Fourier Analysis and Pseudo-differential operators, 25/June/2012 at Aalto university, Espoo, Finland、及び「Trace formula for a sub-Laplacian on $SL(2, \mathbb{R})$ 」, 2012 Workshop Geometric and Singular Analysis (12-16/March/2012 at University of Potsdam, Potsdam, Germany で講演したが、さ

らに今年度からの研究で論文として完成する予定である)。

(2) 高次の Carnot 群から導かれる Grushin 作用素の作用関数を構成する問題にも取り組み、部分 Fourier 変換をすることにより高次振動子の作用関数を構成した。これはある常微分方程式に対する 2 点境界値問題の解がいつも唯ひとつであり初期値問題との対応が微分同型になることを (この Jacobi 行列式が Van Vleck determinant である) 示し高次振動子の Hamilton-Jacobi 方程式の解を構成することにより得られた (Kenro Furutani, Chisato Iwasaki and Toshinao Kagawa: An action function for a higher step Grushin operator, *Journal of Geometry and Physics*, **62**, 1949–1976(2012) に発表)。更に今後はこの結果を元に higher step Grushin type 作用素の熱核を構成することを目標とする。

(3) 球面の接束の自明な sub-bundle が bracket generating の性質を持つ場合は 3 次元、7 次元及び 15 次元に限ることを証明した。又対応する sub-Laplacian の固有値の計算も、7 次元の場合の余次元が 3 の場合も含めて部分的に行った。これは所謂自明な sub-Riemann 構造を持っている多様体の典型例であることを個別に確認し、Laplacian では起こらない現象を見つける事が一つの目標であり、その構造を持つ他の場合の研究に向けた第一歩である (Wolfram Bauer and Kenro Furutani and Chisato Iwasaki: Trivializable sub-Riemannian structures on spheres, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **137**, 361–385(2013) に発表)。そこに現れる劣楕円型作用素のスペクトルゼータ関数の研究は従来の楕円型に対応する作用素 (= Laplacian) より豊富な情報を含んでいるはずで、今後も研究を継続する予定である。

(4) 高次 Carnot 群上の sub-Laplacian を余次元 2 の部分群による商空間に descend した作用素 (higher step Grushin type 作用素) の基本解の構成についての研究を行った。二通りの変数変換によるアプローチがあることが分かり、Bessel 関数の Weber 公式、変形 Bessel 関数また球面調和関数を用いることにより積分表示式による展開式を得、論文としてまとめたところである。

(5) 任意符号 $\{r, s\}$ の 2 次形式に関する Clifford 代数 $Cl_{r,s}$ とその minimal admissible module から構成される一般 Heisenberg type 群における一様離散部分群の存在問題を研究した。これは Malcev

の定理によって、対応する Lie 環 $N_{r,s}$ に構造定数が有理数 (2 step の場合は整数に出来る) であるような基底の存在問題になるが、本研究ではより詳しく構造定数が 1, 0, -1 のみを取るような基底の構成をすべての場合に行った。これは正定値の二次形式に関する場合 (古典型 Heisenberg type 群と呼んでいて, G. Crandall and J. Dodziuk, Integral structures on H-type Lie algebras, *Journal of Lie Theory* **12**, No. 1, 69-79(2002) で示された) の拡張であり、 $N_{r,s}$ と $N_{r+1,s+1}$ 、又 $N_{r,s}$ と $N_{r+4,s+4}$ の関係や、Bott 周期性との関連での一様離散部分群の相互関係も合わせて解明した (Kenro Furutani and Irina Markina : Existence of Lattices on General H-type groups, *Journal of Lie Theory*, **24**, No. 4. 979–1011(2014), published electrically in March 2014)。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 4 件)

① Kenro Furutani and Irina Markina : Existence of Lattices on General H-type groups, *Journal of Lie Theory*, **24**, No. 4. 979–1011(2014), published electrically in March 2014, the printed version will be published in December 2014. 査読あり

② Wolfram Bauer and Kenro Furutani and Chisato Iwasaki: Trivializable sub-Riemannian structures on spheres, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **137**, No. 3, pp. 361–385, 2013, 査読あり

<http://dx.doi.org/10.1016/j.bulsci.2012.09.004>

③ Kenro Furutani, Chisato Iwasaki and Toshinao Kagawa: An action function for a higher step Grushin operator, *Journal of Geometry and Physics*, **62**, No. 9, pp. 1949–1976, 2012, 査読あり

[doi:10.1016/j.geomphys.2012.04.004](https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2012.04.004)

④ Wolfram Bauer and Kenro Furutani and Chisato Iwasaki: Spectral zeta function of the sub-Laplacian on two step nilmanifolds, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, **97**, No. 3, pp. 242–261, 2012, 査読あり

[doi:10.1016/j.matpur.2011.06.003](https://doi.org/10.1016/j.matpur.2011.06.003)

[学会発表](計 8 件)

① Kenro Furutani
題目：Functional equation of spectral zeta function of a sub-Laplacian on a nilmanifold, 2013 Workshop on Analysis and Sub-Riemann Geometry (15/August/2013, at Greifswald Universität, Greifswald, Germany) 招待講演

② Kenro Furutani
題目：Towards a construction of the heat kernel for a higher step Grushin operator, Oberseminar: Analysis partial Differentialgleichung at Ludwig Maximilians Universität München, Munich, Germany (2013年5月28日) 招待講演

③ Kenro Furutani
題目：A solution of a Hamilton system associated to a higher step Grushin operator, 2013 NCTS Workshop on Geometric and Singular Analysis, 台湾 新竹市 国立清华大学 国家理论中心 (2013年1月7日 ~ 1月8日) 招待講演

④ Kenro Furutani
題目：Second regularization of zeta-determinants for an infinite family of elliptic operators, 2012 International conference on Fourier Analysis and Pseudo-differential operators (25/June/2012 at Aalto university, Espoo, Finland) 招待講演

⑤ Kenro Furutani
題目：Trace formula for a sub-Laplacian on $SL(2, \mathbb{R})$, 2012 Workshop Geometric and Singular Analysis (12-16/March/2012 at University of Potsdam, Potsdam, Germany) 招待講演

⑥ Kenro Furutani
題目：Trivializable sub-Riemann structure and Spectral Analysis, 2011 Taiwan-Japan Joint Workshop on Partial differential equation and Geometric Analysis at National Center for Theoretical Science, Division mathematics, National Shinhua University, Hsinchu, Taiwan (19/12/2011) 招待講演

⑦ Kenro Furutani
題目：A solution of a Hamilton system associated to a higher step Grushin Operator and a kernel function, Seminar at Georg-August University Göttingen (04/October/2011, at Georg-August University Göttingen) 招待講演

⑧ Kenro Furutani

題目：Heat Kernel of the Grushin Operator and Complex Hamilton-Jacobi Method, DMV Jahrestagung 2011 at University of Köln, Germany (20/September/2011) 一般講演

6. 研究組織

(1) 研究代表者

古谷 賢朗 (FURUTANI, Kenro)

東京理科大学・理工学部・教授

研究者番号：70112901

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者

岩崎 千里 (IWASAKI, Chisato)

兵庫県立大学・大学院物質理学研究科・教授

研究者番号：30028261

(4) 海外研究協力者

Wolfram Bauer

Germany, Göttingen 大学・教授

Irina Markina

Norway, Bergen 大学・教授