

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 9 日現在

機関番号：34315

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540256

研究課題名(和文)  $C^*$ -における従順群作用の分類とその応用研究課題名(英文) Classification of amenable group actions on  $C^*$ -algebras and its applications

研究代表者

大坂 博幸 (Osaka, Hiroyuki)

立命館大学・理工学部・教授

研究者番号：00244286

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,000,000円、(間接経費) 1,200,000円

研究成果の概要(和文)：照屋氏との共同研究で，Winter, Zachariasにより提示された核型次元に関連する問題を拡張し，綿谷指数有限な核型 $C^*$ -環の包含関係  $P \subset A$ が，小高，大坂，照屋の意味でロホリン性を持つとき， $P$ の核型次元は， $A$ の核型次元以下である評価を得た．これにより，Winter, Zachariasの問題への部分解を与えることができた．さらに，綿谷指数有限な $C^*$ -環の包含関係  $P \subset A$ にトレース的ロホリン性を定義し， $C^*$ -環 $A$ が可分な核型単純で単位元を持つとき， $A$ の $Z$ 安定性が， $P$ に遺伝することが証明できた．

研究成果の概要(英文)：Let  $P \subset A$  be an inclusion of unital  $C^*$ -algebras with a finite Watatani Index. We show that if an inclusion  $P \subset A$  has the Rokhlin property in the sense of Kodaka, Osaka, Teruya, then the nuclear dimension of  $A$  is greater than or equal to that of  $P$ . This is a partial answer to a question by Winter-Zacharias. Moreover, under an inclusion  $P \subset A$  has the tracial Rokhlin property in the sense of Osaka and Teruya, if  $A$  is the Jiang-Su stable, then so is  $P$ .

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード： $C^*$ -環  $C^*$ -指数理論 ロホリン性 Jiang-Su環 トレース不等式

1. 研究開始当初の背景

- (1) 核型単純  $C^*$ -環を  $K$ -理論を用いて分類する Elliott プログラムにおいて, Jiang-Su 環  $Z$  は重要な役割を果たしており,  $Z$ -安定な単純な  $C^*$ -環  $A$ , すなわち,  $A$  と  $Z$  の  $C^*$ -テンソル積が  $A$  と同型になるクラスにおいて, Elliott 不変量が完全不変量になることが予想され, 多くの数学者によって研究が進められている. 実際,  $Z$  安定でない 2 つの核型  $C^*$ -環で, Elliott 不変量は同型であるが,  $C^*$ -同型にならない例が Toms および Rordam により構成されている.
- (2) 核型  $C^*$ -環に関連する非可換次元として, 2010 年に Winter と Zacharias により核型次元が導入されたが, 核型次元有限な単純  $C^*$ -環が  $Z$  安定であることが, 2011 年に Winter により示され核型単純  $C^*$ -環において, 核型次元が有限,  $Z$  安定, Cuntz 半群が強安定性を持つ, ことが同値であることが予想されている. Rordam により,  $Z$  安定ならば  $Z$  が成立することが, 2006 年に示されている.
- (3)  $C^*$ -環  $A$  と群  $G$  のそれ上の作用から構成される  $C^*$ -接合積  $C^*(A, G, \alpha)$  は,  $C^*$ -環の代数構造解析において重要な概念であり, 多くの研究がある. 特に, 整数群, 実数群からの口ホリン性を持つ作用は, 岸本により, 90 年度から精力的に調べられてきた. 泉により有限群の口ホリン作用が形式化され, 作用の分類がなされてきたが, 非可換トーラス環上に口ホリン性を持つ有限群作用が存在しないなど  $K$ -群レベルでの障害を外すため, Phillips により, 口ホリン性より弱いトレース的口ホリン性が定義され, 実階数 0, 安定階数 1, トレース階数 0 等について  $A$  から  $C^*(A, G, \alpha)$  への遺伝性が調べられたり, 作用とその双対作用の関係が調べられた. 大坂と Phillips は, トレース的口ホリン性を整数群の作用に拡張し, 与えられた単純  $C^*$ -環が, Lin の意味でトレースランク 0 ならば, 接合積もトレースランク 0 になることやただ 1 つのトレースを持つ単純  $C^*$ -環のトレースによる GNS 表現から導かれるノイマン環が従順 II<sub>1</sub> 型であることが, 作用が口ホリン性を持つこ

とと同値であることを示した.

2. 研究の目的

- (1) 有限群の作用が, 口ホリン性, トレース口ホリン性を持つとき, 与えられた  $C^*$ -環のどのような性質が接合積, あるいは, 固定環に遺伝するかを明確にするのが目的の 1 つである. 特に, Elliott 分類問題において重要な役割を果たすであろう,  $Z$  安定性, Cuntz 半群の強安定性, 核型次元, さらに, これより強い, Kirchberg, Winter により導入された分解次元の遺伝性について明らかにする.
- (2) 有限群においてトレース的口ホリン性より弱い新しい作用の形式化を模索したり, 一般の離散群の作用に対する口ホリン性を考察し, 基本的性質を調べる.
- (3) 有限群における佐藤, 松井により導入された強外部性とトレース的口ホリン性の関係を明確にする.

3. 研究の方法

接合積を直接解析することは困難であるので, 以下 2 通りのアプローチをおこない解析をする.

- (1) 単位元を持つ可分な  $C^*$ -環から成るクラス  $C$  が次の 4 条件を満たすとき, 有限飽和的という:  $A \in C$ ,  $B$  が  $A$  と同型ならば,  $B \in C$ ,  $A_1, A_2, \dots, A_n \in C$  ならば,  $\oplus A_i \in C$ ,  $A \in C$ , かつ,  $n$  が自然数ならば,  $M_n(A) \in C$ ,  $A \in C$ ,  $p \in A$  が射影作用素ならば,  $pAp \in C$ . 大坂, Phillips により, 与えられた  $C^*$ -環が, 局所的に有限飽和的なクラスによって近似されるとき, 有限群の作用が口ホリン性を持つならば, その接合積も局所的にクラス  $C$  に属する  $C^*$ -環により近似されることが示されている. よって, 解析したい性質を持つ単位元を持つ  $C^*$ -環のクラスが飽和的であることを示されれば, その性質は, 与えられた  $C^*$ -環から, 口ホリン性を持つ作用から導かれる接合積に遺伝することがわかる. さらに, より弱いトレース的な意味で局所的にクラス  $C$  に属する  $C^*$ -環で近似されれば, トレース的口ホリン性を持つ

つ作用から導かれる  $C^*$ -接合積も局所的にクラス  $C$  に属する  $C^*$ -環によってトレース的に近似できることが、最近大坂、照屋によって示されたので、口ホリン性の場合と同じ解析で、性質の固定環及び  $C^*$ -接合積への遺伝性を示すことができる。

(2) 有限群  $G$  の作用から生成される  $C^*$ -接合積  $C^*(A, G, \cdot)$  を考えるとき、綿谷指数有限な典型的な  $C^*$ -包含関係  $P \triangleleft A \triangleleft C^*(A, G, \cdot)$  が得られる。これに注目して、綿谷指数有限な  $C^*$ -包含関係  $P \triangleleft A$  に対して、接合積の場合の拡張となる口ホリン性を定義し、様々な性質を解析する方法を小高、大坂、照屋により 2006 年に提案された。この方法をトレース的口ホリン性まで拡張し、群の作用がトレース的口ホリン性の場合に解析ができる。

#### 4. 研究成果

(1) 照屋氏との共同研究で、Winter, Zacharias により提示された核型次元に関連する問題を拡張し、綿谷指数有限な核型  $C^*$ -環の包含関係  $P \triangleleft A$  が、小高、大坂、照屋の意味で口ホリン性を持つとき、 $P$  の核型次元は、 $A$  の核型次元以下である評価を得た。特に、有限群  $G$  から  $A$  への作用が、泉の意味で口ホリン性を持つとき、 $C^*$ -接合積  $C^*(A, G, \cdot)$  の核型次元は、 $A$  の核型次元以下と評価でき、Winter, Zacharias の問題への部分解を与えることができた。また、Cuntz 半群に関しても上の条件下で、 $A$  の Cuntz 半群が強安定性を持つとき、 $P$  も強安定性を持つことが示せた。これらの結果は、核型  $C^*$ -環の分類問題に貢献することが期待できる。

(2) Hoa, Ho 両氏との共同研究において、必ずしも slow dimension growth を持つとは限らない単純 AH 環  $A$  における LP 性 (射影作用素の線形和が稠密である) について調べ、 $A$  が Elliott, Bratteli の small eigenvalue variation 性を持てば、LP 性を持つことを示した。一般の LP 性は hereditary 環に遺伝されていないが、小高、大坂、照屋の意味で口ホリン性を持つ包含関係  $P \triangleleft A$  の下では、 $A$  の LP 性は  $P$  に遺伝することを示した。特に、 $G$  が有限群であるとき、 $A$  の  $G$  による固定環  $A^G$  に遺伝する。

(3) Jiang-Su 環  $Z$  安定性を調べる際、特に、佐藤氏の SI 性の計算の際現れるトレース評価について研究をおこない、量子情報理論における Powers-Stormer 不等式の拡張版を、Hoa, Ho 両氏との共同研究で示すことができた。これに関連して、作用素不等式と非負

実数上の関数の作用素単調性の関係を富山、Hoa 両氏との共同研究で明らかにした。

(4) 照屋氏との共同研究において、(1) の拡張として、綿谷指数有限な  $C^*$ -環の包含関係  $P \triangleleft A$  にトレース的口ホリン性を定義した。これは、有限群の  $C^*$ -接合積において Phillips 氏によって研究されたトレース的口ホリン性の自然な拡張である。このとき、 $C^*$ -環  $A$  が可分な核型単純で単位元を持つとき、 $A$  の  $Z$  安定性が、 $P$  に遺伝することが証明できた。また、Cuntz 半群の強安定性についても、可分な完全である  $A$  から  $P$  への遺伝性を示すことができた。ちなみに、完全性は核型性より弱い条件である。

(1) (4) の結果は、Winter, Toms, Zacharias の予想である、可分な核型単純  $C^*$ -環において、3 条件、 $Z$  安定性を持つ、核型次元が有限である ( $\infty$  分解次元が有限である)、Cuntz 半群が強安定性を持つ、が同値であることの肯定的データを与えている。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

著者名: D. T. Hoa, H. Osaka, 論文標題: Inequalities for interpolation functions, 雑誌名: Banach Journal of Mathematical Analysis, 査読: 有, ページ: 掲載決定

著者名: H. Osaka, 論文標題: Matrix functions and the generalized Powers-Stormer inequality, 雑誌名: The proceedings of Positivity 2013, 査読: 有, ページ: 掲載決定

著者名: H. Osaka, T. Teruya, 論文標題: Strongly self-absorbing property for inclusions of  $C^*$ -algebras with a finite Watatani index, 雑誌名: Trans. Amer. Math. Soc., 査読: 有, 巻: 366, 発行年: 2014, ページ: 1685 - 1702 / 10.1090/s0002-9947-2013-05907-7

著者名: D. T. Hoa, T. M. Ho, H. Osaka, 論文標題: The linear span of projections in AH algebras and for inclusions of  $C^*$ -algebras, 雑誌名: Abstract and Applied Analysis, 査読: 有, 巻: 2013, 発行年: 2013, ページ: Article ID204319, 1 - 12 / 10.1155/2013/204319

著者名: D. T. Hoa, T. M. Ho, H. Osaka, 論文標題: On generalized Powers - Stormer's Inequality, 雑誌名: Linear Algebra Appl., 査読: 有, 巻: 438, 発行年: 2013, ページ: 242 - 249 / 10.1016/j.laa.2012.07.053

著者名: S. -H. Kye, H. Osaka, 論文標題: Classification of bi-quitrit

PPT entangled edge states by their ranks, 雑誌名:Journal of Mathematical Physics, 査読:有, 巻:53, 発行年:2012, ページ:052201 / 10.1063/1.4712302  
著者名:H. Osaka, J. Tomiyama, 論文標題: Double piling structure of matrix monotone functions and of matrix convex functions II, 雑誌名: Linear Algebra Appl., 査読:有, 巻:437, 発行年:2012, ページ:735 - 748 / 10.1016/j.laa.2012.02.033  
著者名: H. Osaka, N. C. Phillips, 論文標題 :Crossed products by finite group actions with the Rokhlin property, 雑誌名:Math. Z., 査読:有, 巻:270, 発行年: 2012, ページ: 19 - 42 / 10.1007 / s00209-010-0784-4

[学会発表](計 17件)

発表者名: D. T. Hoa, T. M. Ho, H. Osaka, 発表課題 :Interpolation classes and matrix means, 学会名等: 日本数学会 2014 春期総合分科会, 発表年月日:2014年3月18日, 発表場所:学習院大学(東京)  
発表者名: H. Osaka, 発表課題:, Permanence properties for inclusion of unital  $C^*$ -algebras 学会名等: 2013年作用素論・作用素環論研究集会, 発表年月日:2013年11月23日, 発表場所: お茶の水女子大学(東京)  
発表者名: D. T. Hoa, T. M. Ho, H. Osaka, 発表課題 :Interpolation functions and matrix means, 学会名等:作用素単調関数と関連する話題について, 発表年月日:2013年11月7日, 発表場所: 京都数理解析研究所(京都)  
発表者名: D. T. Hoa, T. M. Ho, H. Osaka, 発表課題:LP Property for  $C^*$ -algebras, 学会名等: 日本数学会 2013 秋期総合分科会, 発表年月日:2013年9月26日, 発表場所:愛媛大学(愛媛)  
発表者名: H. Osaka, 発表課題: Matrix monotone functions with application to quantum information theory, 学会名等: The 1<sup>st</sup> International workshop on Quantum Information Theory and related topics, 発表年月日:2013年8月19日, 発表場所:Da Nang(Viet Nam)  
発表者名: H. Osaka, 発表課題:Matrix monotone functions and a generalized Powers-Stormer Inequality, 学会名等: Positivity

2013, 発表年月日:2013年7月22日, 発表場所:Leiden (Netherland)  
発表者名: H. Osaka, 発表課題 :Inclusion of  $C^*$ -algebras and Rokhlin property, 学会名等: The Asian Mathematical Conference 2013, 発表年月日:2013年7月1日, 発表場所: 釜山(韓国)  
発表者名: H. Osaka, 発表課題: LP property for  $C^*$ -algebras, 学会名等: Special week on Operator Algebras 2013, 発表年月日:2013年6月18日, 発表場所:上海(中国)  
発表者名: D. T. Hoa, T. M. Ho, H. Osaka, 発表課題:On generalized Powers - Stormer's inequality, 学会名等: 日本数学会 2013 春期総合分科会, 発表年月日:2013年3月22日, 発表場所:京都大学(京都)  
発表者名: H. Osaka, T. Teruya, 発表課題:Nuclear dimension for an inclusion of unital  $C^*$ -algebras, 学会名等: 日本数学会 2013 春期総合分科会, 発表年月日:2013年3月22日, 発表場所:京都大学(京都)  
発表者名: H. Osaka, 発表課題:量子情報理論入門 I, II, 学会名等: RIMS 共同研究「量子化と作用素環」, 発表年月日:2013年2月4日,5日, 発表場所:京都数理解析研究所(京都)  
発表者名: H. Osaka, 発表課題: Characterization of monotonicity by the inequality, 学会名等: Recent advances in Operator Theory and Operator Algebras, 発表年月日:2013年1月10日, Bangalore (India)  
発表者名: H. Osaka, 発表課題: On generalized Powers - Stormer's inequality, 学会名等: RIMS 共同研究「幾何学および確率的手法による作用素の構造解析の研究」, 発表年月日:2012年11月5日, 発表場所:京都大学数理解析研究所(京都)  
発表者名: H. Osaka, 発表課題: Classification of bi-qutrit positive partial transpose entangled edge states by their ranks, 学会名等: KOTAC2012, 発表年月日:2012年6月22日, 発表場所:清州市(韓国)  
発表者名: H. Osaka, 発表課題: Generalized Powers - Stormer inequality, 学会名等: Special week on Operator Algebras 2012, 発表年月日:2012年6月19日, 発表場所:上海(中国)  
発表者名: H. Osaka, 発表課題 :Nuclear dimension for an inclusion of unital  $C^*$ -algebras, 学会名等: 2011年作用素論・作用素環

論研究集会, 発表年月日:2011 年 11  
月 3 日, 発表場所:琉球大学(沖縄)  
発表者名: H. Osaka, 発表課題:  
Nuclear dimension for an inclusion  
of unital C\*-algebras, 学会名等:  
Special week on Operator Algebras  
2011, 発表年月日:2011 年 6 月 21 日,  
発表場所:上海(中国)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕  
ホームページ等  
<http://www.ritsumeai.ac.jp/se/~osaka/>

## 6. 研究組織

(1) 研究代表者  
大坂 博幸 (OSAKA HIROYUKI)  
立命館大学・理工学部・教授  
研究者番号: 00244286

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者  
佐藤 康彦 (SATO YASUHIKO)  
京都大学・理学研究科・助教  
研究者番号: 70581502

照屋 保 (TERUYA TAMOTSU)  
群馬大学・教育学部・准教授  
研究者番号: 30594246