

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 5 日現在

機関番号：34428

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540257

研究課題名(和文) 繰りこみ群の数理科学での応用

研究課題名(英文) Applications of Renormalization Group Methods in Mathematical Sciences

研究代表者

伊東 恵一 (Ito, Keiichi)

摂南大学・理工学部・教授

研究者番号：50268489

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円、(間接経費) 990,000円

研究成果の概要(和文)：くりこみ群を用いて、前世紀からの難問の解決を目指す。代表的な問題は、ミレニアム問題としてクレイ研究所の懸賞問題として挙げられ、最近話題になったペレルマンによる、ポアンカレ予想の解決、ワイルズによるフェルマー問題の解決などがある。ナヴィエ・ストークス方程式の乱流解、ヤング・ミルズ・ゲージ理論の存在などが未解決であり、共通して積分が無限次元という困難がある。これを関数空間の中に部分空間列を捜し(軌道という)これに沿って行う手法で解決する。ゲージ理論のプロトタイプの2次元非線形スピンモデルでほぼ解決を見た。

研究成果の概要(英文)：We applied the renormalization group methods to the longstanding problems (the so-called Millennium problems) in mathematical sciences which go back to the last century. We apply this method to solve the 2D  $O(N)$  symmetric spin model which is a prototype model of the gauge theory model. In this model, one needs to integrate over infinite variables which form a functional space. We find a set of subspaces (called flow) which dominate the integral. This enables us to solve the recursive integrals and obtain the final result.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：大域解析学

キーワード：くりこみ群 ミレニアム問題 シグマ模型 格子ゲージ模型 くりこみ群の流れ

1. 研究開始当初の背景  
 数理科学には長年に亘って未解決の問題があり、それを解くことによって次の新たなステージに進むことができるような重要な問題がある。量子場の理論において、標準理論が非可換ゲージ場の上に構築され認められており、次への発展が期待されているが、その数学的構成などは難問として未解決である。  
 同様に Navier-Stokes 方程式も乱流解をもつと信じられているが証明は得られていない。これらの問題は、Riemann 予想などと一緒に Clay 研究所のミレニアム問題として掲載されている。21 世紀に入ったが、これらの問題を解決することは、これからの科学の進展のために強く要求されている。
2. 研究の目的  
 我々の目的は、上記の問題に対する統一的な分析法と信じられる計算法、「くりこみ群法」によって決定的結論をだし、次の段階にすすむことである。すなわち
  - (1) 4次元非可換格子ゲージ理論の構成、特にクオーク粒子の幽閉問題
  - (2) 2次元  $O(N)$  スピン模型の相転移不存在
  - (3) ナヴィエ・ストークス方程式が乱流解を示すことの証明
  - (4) 古典量子電気力学のくりこみ可能性の証明
  - (5) (4) のモデル (Rabi モデル) を分析、人工原子の研究に用いる
 などである。さらにこの分析方法を、数理科学のほかの諸問題の解決法として技術確立することが目的である。他の研究者にその効用を伝えることも重要な目的である。
3. 研究の方法  
 難問の難問たる所以は、計算がややこしいという点にあるのではなく、どう解いていいかわからないという点にある。我々がこの問題に対して準備した方法は「くりこみ群法」という無限次元空間での積分法である。普通の積分と異なり、確率論、統計力学、力学系や流体系のように、多くの自由度が複雑に絡み合い、それらが協力現象を起こすようなシステムでは、無限次元での積分が現れる。これは不可能のように見えるが、この関数の作る空間の中にそこで積分が飽和するような最適な部分空間を捜し、そこで積分を遂行する手法である。この部分空間の決定は漸化式の形で、次から次へと逐次行われ、半群構造を持つ。これは繰りこみ群法又は、マルチ・スケール・アナリシスといい、無限次元の協力現象を扱わざるを得ない上記の問題に対しては多分唯一無二の解析法である。この

方法の欠点は構成と計算が入り組んでいて難解なことで、分かりやすく、コンパクトに推論と計算を重ねなくてはならない。

4. 研究成果  
 (1) 伊東は上記の方法を格子ゲージ模型のプロトタイプである、2次元ハイゼンベルグ模型に応用した。これはプロトタイプではあるが、前世紀からの未解決の名うての難問題で、格子ゲージ模型と同じ側面をもつ。我々はこれに対して、duality 変換 (Fourier 変換) ののち、2変数に対して上記の変換を実行した。いわゆる汎関数積分を遂行するが、逐次に積分を繰り返すために、最適な部分空間列を選ぶことが必要である。結論はくりこみ群のシナリオに合致して、最適な部分空間群 (くりこみの流れという) が取れること、そしてそれは直感的くりこみ群の解析からのずれはかなりあるものの、ほぼ我々のシナリオを肯定するものである。  
 (2) また寺本教授のグループは、直接繰り込み群とは関連しないものの、傾いた坂を流れ落ちる粘性流を Navier-Stokes 方程式を解いて求めた。この Navier-Stokes 方程式は、少し前 Ya Sinai が試みたように、くりこみ群が使える側面があった。時間的制約があって、この方面の分析が出来なかったのは残念で将来の分析にゆだねたい。  
 (3) 廣島教授は、古典的量子電気力学の基底状態を分析、無限次元空間の積分を経路積分で行い、Laplacian の部分がその  $1/2$  乗になる場合でも、これが Bernstein 関数という形になり、普通の版関数積分が遂行できることを示した。このモデルは繰り込み群法が効果を表す場面と信じられるが、現在のところ、その方向性が確立できていないのは残念で次の問題である。
5. 主な発表論文等  
 (研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)  
 [雑誌論文](計 10 件)  
 (1) Keiichi R. Ito, Absence of Phase Transitions in 2D  $O(N)$  Spin Models and Renormalization Group Analysis, 数理解析研究所講究録 1904号, pp.147—159, 2014  
 (2) Y.Teramoto, K.Tomoeda, On a linerized system arising in the study of viscous surface flow down an inclined plane, Annali dell'Univ. di Ferrara Jan, 2014  
 (3) T.Nishida, Y.Teramoto, M.Paruda Heat convection of Compressible

- Viscous fluids, II,  
Journal of Math. Fluid Mechanics  
Vol.15, pp.689-700 (2013)
- (4) T.Nishida, Y.Teramoto, M.Paruda,  
Heat convection of Compressible  
Viscous fluids, I, Journal of Math.  
Fluid Mechanics, Vol.15, pp. 525 – 536
- (5) T.Miyao, Monotonicity of the Polaron  
Energy II, J.Stat.Phys., vol.153,  
pp.70-92 (2013)
- (6) F.Hiroshima, Multiplicity of the  
Lowest Eigenvalues of non-commutative  
harmonic oscillator, Kyushu J. Math.,  
Vol.67, (2013) 355-366
- (7) F.Hiroshima, Probabilistic  
representation and fall-off of bound  
state of relativistic Schroedinger  
operator of spin 1/2, Publ.RIMS Kyoto,  
vol.49 (2013) 189-214
- (8) F.Hiroshima, Lieb-Thirring bound for  
Schroedinger operators with Bernstein  
functions of the Laplacian,  
Commun.Stoch.Anal., vol.6 (2012)  
589-602
- (9) H.Tamura, V.Zagrevnov, Random Point  
Field Approach to Analysis of  
Anisotropic Bose Einstein  
Condensations, Markov Processes and  
Relat. Fields., vol.18,  
(2012) 473--530
- (10) Keiichi R. Ito, Absence of Phase  
Transitions in 2D O(N) Heisenberg  
Model, 数理解析研究所講究録  
1805号, pp.51-62, 2012
- (11) T.Miyao, Ground State properties of  
SSH Model, J. Math.Phys., vol.53,  
095215 (2012)
- (12) F.Hiroshima, Infrared Problem for the  
Nelson Model with Lieb-Thirring bound  
for Schroedinger operators with  
Bernstein functions of the Laplacian,  
Commun.Stoch.Anal., vol.6 (2012)  
589-602

〔学会発表〕(計 4 件)

- (1) K.R.Ito, Absence of Phase Transitions  
in Two-Dimensional O(N) Heisenberg  
model with large N, Harvard  
University Physics Seminar,  
Harvard University, 2014, March
- (2) K.R.Ito, Study of O(N) Spin Model by  
RG Method and absence of Phase  
Transition, Helsinki University  
Physics Seminar, Helsinki,  
2013, March
- (3) K.R.Ito, Millenium Problem, Study of  
2D O(N) Spin model,  
数理解析研究所研究集会, 2013 Sept.

- (4) K.R.Ito, 17<sup>th</sup> International Congress of  
Mathematical Physics,  
Aalborg (Denmark) 2012, August

〔図書〕(計 4 件)

- (1) 伊東恵一, 一瀬孝, 岡本久, 他,  
数理解物理学の方法, ノイマンコレクション  
I (翻訳と解説),  
450 ページ, 2013, ちくま書房
- (2) F.Hiroshima, H.Spohn, I.Sasaki,  
A.Sasaki,  
Enhanced Binding in Quantum Field  
Theory, COE Lecture Note Vol.38,  
March 2012, Kyushu University
- (3) 伊東恵一, 編著  
解析学と物理学, 数理科学 No.587  
サイエンス社, May 2012
- (4) 伊東恵一,  
繰り込み群の数理解学における応用,  
SGC ライブラリー, vol.81,  
148 ページ, サイエンス社, 2011

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
出願年月日 :  
国内外の別 :

取得状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
取得年月日 :  
国内外の別 :

〔その他〕

ホームページ等

- (1) <http://www.setsunan.ac.jp/mpg/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

伊東恵一 (ITO KEIICHI R.)  
摂南大学・理工学部・教授

研究者番号 : 50268489

(2) 研究分担者

寺本恵昭 (TOSHIAKI TERAMOTO)  
摂南大学・理工学部・教授

研究者番号 : 40237011

宮尾忠宏  
摂南大学・理工学部・講師

現

北海道大学・自然科学研究科・准教授  
研究者番号：20554421

(2) 連携研究者

田村博志 (TAMURA HIROSHI)

金沢大学・機械工学系・教授

研究者番号：80188440

廣川真男 (HIROKAWA MASAO)

岡山大学・自然科学研究科・教授

研究者番号：70282788

廣島文生 (HIROSHIMA FUNIO)

九州大学・数理学研究科・准教授

研究者番号：00330358