

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 14 日現在

機関番号：82118

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540328

研究課題名(和文)GRACE-2LOOPの開発と応用

研究課題名(英文)The Study of automatic 2 loop calculation system(GRACE) and its application

研究代表者

石川 正 (Ishikawa, Tadashi)

大学共同利用機関法人高エネルギー加速器研究機構・計算科学センター・准教授

研究者番号：90184481

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：素粒子物理学では、場の量子論と呼ばれる理論体系が支配的であり、かつ摂動計算が有効であることが知られている。LHC, ILC, KEKBなどに代表される素粒子物理学実験では、ヒッグス粒子らしい発見により標準模型を超えた現象や新粒子を見つけるために、超精密な実験が期待されている。このような高次補正の計算は膨大であり、自動化のためのシステムが必要である。現在、高エネルギー素粒子反応解析において電弱相互作用の1ループ摂動計算を自動的に行うことを完成させたが、本研究では、2ループ計算の自動化に向けた理論的定式化とシステム開発を行った。

研究成果の概要(英文)：In particle physics, quantum field theory is a framework for describing the particle and field. The perturbative approach to quantum field theory is indispensable for the analysis of high energy particle experiments, such as LHC, ILC and KEKB. By the discovery of Higgs boson like particle, the deviation from the Standard Model is quite important to find the phenomenon beyond the standard model and a new particle. The calculations of higher order corrections are enormous, so that a system for automation is necessary. We developed theoretical formulation and system for the automation of 2 loop calculations.

研究分野：素粒子物理学

キーワード：素粒子物理学 計算科学 標準模型 ファインマン積分

1. 研究開始当初の背景

LHC、ILCそしてKEKBなどに代表される高エネルギー素粒子実験では、場の量子論と呼ばれる理論体系が支配的であり、かつ摂動計算が有効であることが知られている。場の量子論における摂動計算の手法はある意味で確立しており、ファインマン規則を用いたファインマン図の作成および個々のファインマン図に対応した運動量積分(いわゆるファインマン積分)を実行すればよい。しかしながら、これらの手法を用いて簡単に計算出来るものは摂動のごく低次項のみである。一方、LHCやILC実験などのTeV領域の実験、あるいはKEKBなどで行われている超精密測定実験に必要なのは摂動の高次計算であり、手法が解っているといえども計算は簡単ではない。特に摂動の次数が上がるとファインマン図の数は爆発的に増加することが知られており、すべてのファインマン図を作成するだけでも容易ではない。本研究メンバーが長年開発に取り組んできたGRACEシステムは、これら高次摂動計算を自動的に行うコンピュータ・システムである。本システムは数百から数千個におよぶファインマン図を自動生成するとともに、ファインマン振幅のコンピュータコードを自動生成する。現行GRACEシステムは、電弱相互作用における1ループ散乱振幅を最大で始状態2体から終状態4体の6点関数まで計算することができる[1,2]。一連のGRACEシステムを用いた1ループレベルの解析から、弱い相互作用といえども高次摂動計算の寄与が無視できないことが明らかになった。我々は、次のステップとして2ループ計算への拡張を目指している。

2. 研究の目的

本研究では手始めとして μ 粒子異常磁気能($g-2$)に対する電弱相互作用の解析を通して2ループ計算に必要な各種技術開発を進めた。 μ 粒子 $g-2$ は標準模型においては極めて正確にその値が理論的に予言できると考えられており、 $g-2$ の精密測定を通して標準模型からのずれを観測することにより、標準模型を超える物理の寄与が検証できると期待されている。現在のところ実験データと理論的予言は3のずれが見られ、日本のJ-PARCなどでもより高精度の実験が計画されている[3]。一方、超精密測定実験を行うには、より高い精度の理論的予言が求められる。例えばQEDについては4ループの解析が終わっており、理論的予言の有効桁数を9桁にもおよぶ。現在5ループの解析が進められている

[4]。同様に強い相互作用や弱い相互作用についても高次量子補正の解析が非常に重要だと考えられる。電弱相互作用に関する高次補正の解析は、これ迄にも複数のグループが行っており、特に漸近展開の手法を用いた主要対数ならびに次主要対数の解析から、電弱相互作用2ループの寄与が重要であることが判っている[5,6,7]。我々は漸近展開を使わずに、電弱相互作用の2ループ計算をダイレクトに実行することを念頭に、2ループ自動計算システムの開発を推し進めた。2ループ計算をダイレクトに行う解析はまだ存在していない。

2ループ計算で最も困難を極めるものは、2ループレベルのファインマン積分の計算である。複数の質量パラメータを含む多次元運動量積分となるため、これらの積分の多くは解析的な計算が不可能であり、コンピュータを用いた数値的解析に頼らざるをえない。一方、ファインマン積分には紫外発散や赤外発散と言われる発散因子が多数含まれているため、これらの発散因子を適切に正則化する必要がある。 $g-2$ の計算では赤外発散は出てこないが紫外発散の処理は必要である。そこでファインマン積分内の紫外発散項をシステムティックに分離し、有限項の積分を完全数値処理により実行する手法を開発する。

ファインマン積分の数値的解析で考えなければならないもう一つの問題は、数値解析そのものの正当性の検証である。電弱相互作用には様々な質量変数が現れるため、コンピュータを用いた数値的解析を行うと深刻な桁落ちが発生する可能性があり、計算精度が著しく低下する。例えば計算結果が得られたとしても、その値が正当であることの保証が必要である。GRACE-1LOOPシステムでは、非線形ゲージ固定項を導入することにより、計算結果の正当性を保証している。非線形ゲージ固定では非線形ゲージ変数と呼ばれる複数のゲージ変数が現れるが、ゲージ不変性からこれらの変数の寄与は相殺していなければならない。1ループ解析では、この特性を利用して数値解析の正当性を検証してきた。2ループの解析でも同様の手法が適用できると期待されるが、決して自明のことではない。本研究では非線形ゲージ固定を用いた手法について2ループレベルへの拡張を検証する。

3. 研究の方法

(1) 理論の定式化と記号処理

自動計算システム(GRACE)では素粒子反応過程と摂動の次数を与えれば全てのファインマン・ダイアグラムのトポロジー、頂点、プロパゲータの

情報を出力することができる。これらの情報に基づいて、ファインマン振幅を Civitanovic-木下の方法で表現し、紫外発散に関してはn次元正則化を適用する。続いてファインマン・パラメータ変数変換を行い0から1の積分変数とした後に、ある変数に着目して $\int f(x, \varepsilon)/x^{2-\varepsilon} dx$ あるいは、 $\int f(x, \varepsilon)/x^{1-\varepsilon} dx$ の形にして紫外発散と有限部分の分離の処理を行う。例えば

$$I = \int f(x, \varepsilon)/x^{1-\varepsilon} dx$$

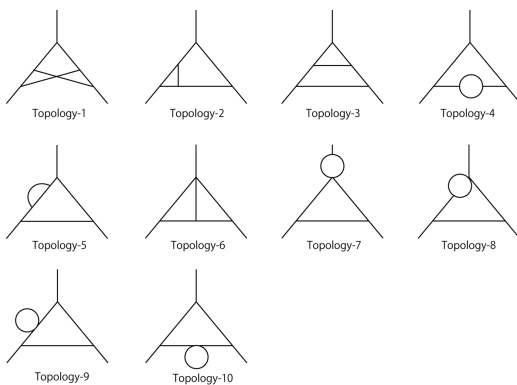
に部分積分を行った後に 展開すると

$$I = \frac{1}{\varepsilon} f(0, \varepsilon) + \int \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} dx$$

と記述することが出来、第1項の発散功と第2項の有限項に分離出来る。xならびにその他のパラメータ積分は全て数値的に実行する。

自動計算システムでは、ダイアグラムのトポロジーは自動的に分類される。また紫外発散と有限部分の切り分けの記号処理についてはトポロジーで決まるので、トポロジー毎の記号処理を行えばよい。

レプトンの異常磁気能率の電弱相互作用 2 ループ補正計算では、下図にあげる 10 タイプ (左右を入ると 14 タイプ) の独立したトポロジーの 2 ループ・バーテックス型ダイアグラムが現れる。そこで個々のトポロジーに対して先の方法を適用し、紫外発散の処理を行う事とする。以下に独立な 10 個のトポロジーグラフを与える。



ソフトウェア開発においては、ガン

マ行列の演算やn次元での縮約等の代数計算が必要なため、これらの処理を高速で行うことの出来る数式処理パッケージ(FORM)を用いた。FORMの結果をフォートランソースに自動出力しファインマン振幅の数値解析コードを自動生成する。

(2) 数値積分方法

二重指数関数変数変換による数値積分方法では端点で特異性があっても積分値を求めることができ、誤差が小さくできることが特長である。多次元積分となるファインマン・パラメータ積分に対しては二重指数関数変換の方法を直積型で適用した。精度の高い計算を GPU や専用計算機を用いて実行した。

(3) 数値の検証

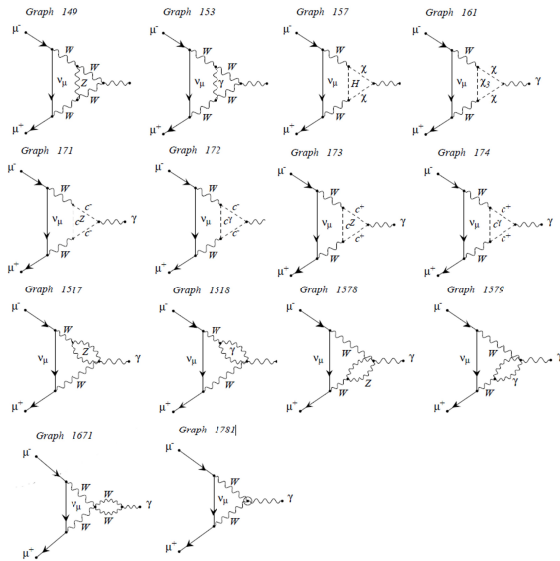
$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{GF} &= -\frac{1}{\xi_W} F^+ F^- - \frac{1}{2\xi_Z} F^Z F^Z - \frac{1}{2\xi_A} F^A F^A \\ F^\pm &= \left(\partial_\mu \mp ie\tilde{\alpha} A_\mu \mp igc_W \tilde{\beta} Z_\mu \right) W^{\mu\pm} \\ &+ \xi_W \left(M_W \chi^\pm + \frac{e}{2s_W} \tilde{\delta} H \chi^\pm \pm i \frac{e}{2s_W} \tilde{\kappa} \chi_3 \chi^\pm \right) \\ F^Z &= \partial_\mu Z^\mu + \xi_Z \left(M_Z \chi_3 + \frac{e}{2s_W c_W} \tilde{\varepsilon} H \chi_3 \right) \\ F^A &= \partial_\mu A^\mu \end{aligned}$$

数値の検証のため、ラグランジアンに非線形ゲージ固定項を導入して数値的な検証を行う。μ粒子 g-2 の解析では、その理論的特性から 1ループレベルの解析で用いたゲージ固定項と全く同じものが適用できると期待される。以下に、今回導入した非線形ゲージ固定項を示す。

は線形ゲージで通常現れるゲージ変数である。非線形ゲージでは新たに5つのゲージ変数 \dots が現れる。またゲージ項の相殺は深刻の桁落ちを引き起こす可能性がある。そこでより精度の高い計算結果を得るために4倍精度から8倍精度の一部専用機を用いて検証を行った。

4. 研究成果

検証は、数式処理で出力したコードを完全数値積分することによって行った。紫外発散部分については on-shell 繰り込みを適用している。例として 1loop の counter term(No.1781)のセットになる紫外発散のあるダイアグラムを以下の次の図に示す。



これらのファインマン図について線形ゲージで計算した結果、紫外発散を 11 桁のオーダーで数値的に取り除く事が出来て、紫外発散項と有限項の分離ならびに数値積分が適切に行われていることが確認できた。紫外発散の計算結果を表 1 に示す。

表 1		
トポロジー	グラフ番号	紫外発散の部分の係数
2	149	3.112E-006
	153	9.092E-007
	157	1.031E-007
	161	1.031E-007
	171	-3.990E-008
	172	-1.165E-008
	173	-3.990E-008
8	174	-1.165E-008
	1517	-3.078E-007
	1518	-8.992E-008
	1578	-3.078E-007
7	1579	-8.992E-008
	1671	-4.773E-006
Counter	1781	1.443E-006
sum		-2.802E-017

次に有限項の解析を進めている。先にも述べたように有限項の数値解析結果を検証するため、非線形ゲージ変数を導入し、ゲージ変数の相殺を数値的に確認する。非線形ゲージ変数は様々な組み合わせと次数で現れるため、現在も検証作業を続行中である。非線

形ゲージを用いた紫外発散も検査しており、例えば ²の現れるダイアグラム 30 個、¹の現れるダイアグラム 164 個で相殺を確認した。¹の現れるダイアグラムは、先の 10 種類のトポロジー中、type1,type6,type7を除く 7 種類のトポロジーが現れる。このように積分構造の異なるグラフ間で、ゲージ変数の相殺が確かめられることが、本システムでの解析結果の正当性を強力に保証していると言える。

システム検証は、数式処理で出力したコードを数値積分することによって行なわれる。

2 ループ・バーテックスの場合には最大 5 次元積分となり、ファインマン・ダイアグラム間の数値的相殺も大きいので、10 桁近くの積分結果が必要になる。そのためファインマンループ積分をできるだけ少ない演算量で高精度で求めるには、二重指数関数変数変換が有効であることを示した(発表論文)。またこの変換は演算精度に敏感でもあり、既存の倍精度演算ではなく、4 倍精度以上の精度演算を行うことによって、より高い精度を求めることが可能である。このため高速で多倍長演算を行うための専用機の開発も行った(発表論文)。一方高速化のために商用のグラフィックボードを計算加速装置として用いた研究も行った(発表論文)。

2 ループの高次補正を求める必要については、1 ループレベルでの輻射補正の物理解析が必要である。既存の 1 ループの計算システムを用いて、国際リニアコライダー実験における輻射 top-pair と輻射 BhaBha 散乱過程の評価を行い、2 ループの計算も実験精度から必要であることがわかった(発表論文)。

<引用文献>

- [1]栗原良将,安井良彰,近匡,加藤潔. 日本物理学会誌 Vol.62. No.5, (2007) 320
- [2]G.Belanger, et.al. Phys. Rep.430 (2006) 117
- [3]<https://www.kek.jp/ja/Research/IPNS/g-2RandD/>
- [4]T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita, M. Nio, Phys. Rev. Lett. 99 (2007) 110406; Phys. Rev. D 77 (2008) 053012
- [5]A. Czarnecki, B. Krause, W. J. Marciano, Phys. Rev. Lett. 76 (1996) 3267
- [6] S. Heinemeyer, D. Stöckinger, G. Weiglein, Nucl. Phys. B 699 (2004) 103
- [7] T. Gribouk, A. Czarnecki, Phys. Rev. D 72 (2005) 053016.

5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 8 件)

H. Daisaka, N. Nakasato, T. Ishikawa,

and F. Yuasa, Application of GRAPE9-MPX for high precision calculation in particle physics and performance results, *Procedia Computer Science*, **51**(2015), 1323-1332.

(査読有)

doi: 10.1016/j.procs.2015.05.317

E. de Doncker, F. Yuasa, K. Kato, T.Ishikawa, and O. OIagbemi, Automatic integration methods for Feynman integrals through 3-loop, *Journal of Physics:Conference Series* **608**(2015)012071. (査読有)

doi:10.1088/1742-6596/608/1/012071

S.Motoki, H.Daisaka, N.Nakasato, T.Ishikawa, F.Yuasa, T.Fukusige, A.Kawai, J.Makino, development of an accelerator board dedicated for multi precision arithmetic operations and its application to Feynman loop integrals, *Journal of Physics:Conference Series* **608** (2015) 012011. (査読有)

doi:10.1088/1742-6596/608/1/012011

P.H. Khiem, Y. Kurihara, J. Fujimoto, T. Ishikawa, T. Kaneko, K. Kato, N. Nakazawa, Y. Shimizu, T. Ueda, J.A.M. Vermaseren, Y.Yasui, Full order(alpha) electroweak radiative corrections to $e^+ e^- \rightarrow e^+ e^- \gamma$ at the ILC with GRACE-Loop. *Phys. Lett.* **B740**(2015)192-198. (査読有)

doi:10.1016/j.physletb.2014.11.048

P.H.Khiem, J.Fujimoto, T.Ishikawa, T.Kaneko, K.Kato, Y.Kurihara, Y.Shimizu, T.Ueda, J.M.Vermaseren, Y.Yasui, Full order(alpha) electroweak radiative corrections to $e^+ e^- \rightarrow t \bar{t} \gamma$ with GRACE-Loop. *The European Physical Journal* **C73**

(2013) 2400. (査読有)

doi:10.1140/epjc/s10052-013-2400-3

F.Yuasa, T.Ishikawa, N.Hamaguchi, T. Koike and N.Nakasato, Accelerating of Feynman loop integrals in high-energy physics on many core GPUs, *Journal of Physics:Conference Series* **454**(2013) 012081. (査読有)

doi:10.1016/j.cpc.2012.05.018

N. Nakasato, H. Daisaka, T.Fukushige, A. Kawai, J. Makino, T.Ishikawa and F.Yuasa, GRAPE-MPs:Implementation of an SIMD for quadruple/ hexuple/ octuple-precision arithmetic operation on a structured ASIC and a FPGA, 2012 IEEE 6th International Symposium on Embedded Multicore Socs (MCSoc) 75-83. (査読有)

doi:10.1109/MCSoc.2012.31

F.Yuasa, E. de Doncker, N.Hamaguchi, T.Ishikawa, K.Kato, Y.Kurihara, J.Fujimoto, Y.Shimizu, Numerical Computation of Two-loop Box Diagrams with Masses, *Computer Physics Communications*, **183** (2012) 2136-2144. (査読有)

doi:10.1088/1742-6596/454/1/012081

6 . 研究組織

(1)研究代表者

石川 正 (ISHIKAWA, Tadashi)
高エネルギー加速器研究機構・計算科学センター・准教授
研究者番号：9 0 1 8 4 4 8 1

(2)研究分担者

安井 良彰 (YASUI, Yoshiaki)
東京経営短期大学・経営総合学科・准教授
研究者番号：5 0 3 8 9 8 3 9

(3)連携研究者

中澤 宣也 (NAKAZAWA, Nobuya)
工学院大学・工学部・名誉教授
研究者番号：5 0 1 0 0 3 4 2