

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 29 年 6 月 7 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2011～2016

課題番号：23560069

研究課題名(和文)非相加系のダイナミクスと熱力学

研究課題名(英文)Dynamics and thermodynamics in non-additive systems

研究代表者

山口 義幸 (YAMAGUCHI, Yoshiyuki)

京都大学・情報学研究科・助教

研究者番号：40314257

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：自然界の基本的な力である重力や電磁気力などは遠方にまで力が及ぶ。これらの力のもとでは、従来の熱・統計力学でなされていた相加性という仮定が成り立たない。またダイナミクスにおいても、準定常状態と呼ばれる非熱平衡状態に長時間トラップされるという特徴的な現象が観られる。本研究では非相加系で見られる保存量が準定常状態の実現に重要な役割を果たしていることを指摘し、またこの保存量の存在が臨界指数を変化させうることを示した。またダイナミクスのいくつかの問題に対しても、従来の結果を拡張することに成功した。

研究成果の概要(英文)：Long-range interactions, which can be found in gravitating systems and electromagnetic systems for instance, break the additivity assumption of thermodynamics and statistical mechanics. In the non-additive systems, dynamics also shows a characteristic phenomenon of trapping at a so-called quasi-stationary state. This project has pointed out that the quasi-stationary state is realized due to existence of conserved quantities which appear in the non-additive systems. We have revealed that the existence of conserved quantities changes the values of some critical exponents. Moreover, some problems of dynamics have been solved under an extended setting, which brings theoretical difficulty comparing with the previous setting.

研究分野：大自由度系の力学と統計力学

キーワード：非相加系 長距離相互作用 準定常状態 応答理論 臨界指数 ランダウ減衰

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 多数の粒子からなる系は相転移などの特徴的な現象を示す。またわれわれが普段目にする物質は多数の粒子から構成されていることを考えると、多粒子系は応用上も重要な対象である。一方で、粒子数の多さから、系を解析するためには、個々の粒子を観測する方法とは異なった方法論が必要とされる。熱・統計力学はその方法論の主要な一つである。従来の熱・統計力学においては、エネルギーなどの相加性が仮定されていた。つまり、系を二つの部分系に分割した時、それぞれのエネルギーの和が分割前の系のエネルギーと等しいという仮定である。この仮定は、相互作用が短距離であり分割にかかるエネルギーが無視できる場合には成立する。しかしながら、自然界の基本的な力である重力や電磁気力は相互作用が遠方にまでおよび、分割にかかるエネルギーが無視できなくなる。このような系を非相加系と呼ぶ。非相加系ではエネルギーという値だけではなく、ダイナミクスにおいても特徴的な現象を示す。例えば、熱平衡状態への緩和過程で観測される準定常状態が挙げられる。多数の粒子からなる系は、長時間の後には熱平衡状態に至ると考えられており、粒子数が大きい有限な場合には非相加系も同様に熱平衡状態に至る。しかしながら、非相加系においては、熱平行状態に行き着く前に、しばしば準定常状態と呼ばれる非熱平衡状態に長時間トラップされることが知られている。実際、楢岡銀河や木星の大赤斑などは準定常状態の例と言われている。これらの例では、準定常状態の寿命は人間のライフタイムよりも十分長いので、観測できるのは準定常状態になってしまう。これより必然的に、準定常状態をも記述できるような熱・統計力学が必要とされていた。

(2) 従来の熱・統計力学は、考察の対象を熱平衡状態とすることにより、系の時間発展の詳細を知らなくとも理論的な予測を与えることができる。例えば、ある初期状態が行き着く熱平衡状態を予測するためには、系のエネルギーや体積などの基本的な量が分かれば十分であった。しかし、非相加系でしばしば観測される準定常状態は非熱平衡状態であるため、少数の基本的な量だけでは記述しきれないと考えられる。実際、ある初期状態が行き着く準定常状態は、初期状態の詳細に依存することが知られている。したがって、準定常状態を対象とするためには、系のダイナミクスをも考察の対象とすべきだと考えられる。

## 2. 研究の目的

(1) 上記の背景より、系のダイナミクスへの理解を深めつつ、非相加系のマクロな現象を記述するための新たな熱・統計力学の構築を目指す。

(2) 上記目的のため、非相加系に特徴的な準定常状態が実現されるための機構についての理解を深める。

(3) 従来の熱力学で考察されている熱機関のサイクルは、外部からの仕事や熱のやりとりについての議論とみることができ。つまり、新たな熱・統計力学を構築するに当たっても、外部からの力に対する系の応答を知ることが重要であると考えられるため、これを研究する。

## 3. 研究の方法

(1) 多数の粒子からなる系において、個々の粒子の時間発展を理論的に追うことは難しい。実際、このような系は一般にはカオス系となり、理論的に時間発展を追うことは困難である。そこでミクロな詳細は求めず、粒子がなす分布を通してマクロな時間発展のみに着目するという方法を用いた。例えば、二つの粒子がそれぞれの位置を交換した場合、ミクロな立場では交換前と交換後は異なる状態として区別しなければならない。しかしマクロな分布という観点に立てば何も変わらないためこの交換は無視できる。つまり、マクロな視点に立てば問題を単純化できる。粒子の分布の時間発展は偏微分方程式で記述されるため、本研究においては、この偏微分方程式を理論的に解析する。

(2) 理論的な予測を検証するため、本研究では二つの方法による数値シミュレーションを用いた。一つは、数値シミュレーションであれば個々の粒子の時間発展を追うことが可能となるため、第一原理に則ってミクロな立場から系の時間発展を追う方法である。もう一つは、上述した偏微分方程式の時間発展を追うマクロな方法である。双方を用いることにより、ミクロとマクロの視点を相補的に活用することとした。

## 4. 研究成果

(1) 熱・統計力学における重要なテーマの一つが外力への応答である。外力への応答とは例えば、バネを外力によって引っ張った時、バネが伸びる長さのことを言う。引っ張る力とバネの伸びを測ることでバネ定数というバネ固有の性質を知ることができる。本研究においては、非相加系における外力への応答について、多くの成果を得た。まず、外力が小さいときには一般には応答は外力に比例することから、線形応答と呼ばれている。本研究では、非相加系における線形応答を求める公式を定式化し、また数値シミュレーションで検証することに成功した。また非線形な応答への拡張、つまり非線形応答理論の構築にも成功している。さらには、線形応答理論と非線形応答理論を統一的に記述する理論も与えることができた。

(2) 多数の粒子からなる系においては、相転移は重要な現象の一つである。系のマクロな形態が変化することを相転移といい、変化する点、例えば変化する温度を臨界点という。臨界点の付近では、ものごとは自己相似的に起こることが知られている。つまり、小さい領域を拡大したものはもとの領域と似たようなものになる。この自己相似性により、観測量は温度などのパラメータに対してべき関数として記述でき、臨界指数と呼ばれる指数で相転移を特徴付けることができる。熱平衡状態における臨界指数は、従来の熱・統計力学によって求められていたが、非相加系における準定常状態での臨界指数は未知であった。本研究では、得られた線形・非線形応答理論を臨界現象に適用することにより、外力への応答に関する臨界指数を求めることができた。その結果、臨界指数は従来知られていた値と異なる値になりうることが明らかになった。さらに興味深いことは、臨界指数が異なるにも関わらず、いくつかの臨界指数の間で成り立つとされる関係式は非相加系の準定常状態でも成り立つことを指摘したことである。

(3) 熱平衡状態と準定常状態で臨界指数が異なるということは、この違いを生み出すところに準定常状態を特徴付ける機構が表れていることを意味する。線形・非線形応答理論において両者の違いを生み出す原因を調べたところ、従来の熱・統計力学においては考慮されていなかったカシミール保存量と呼ばれる保存量が重要な役割を果たしていることが指摘できた。なおこの保存量はモデルとして調べた系にのみ現れるものではなく、非相加系であれば一般に表れることは強調されるべき点である。

(4) カシミール保存量は、準定常状態のみならず、熱平衡状態でも保存されるべき量であるから、熱平衡状態であっても非相加系に特徴的なダイナミクスが得られるのではないかと予想される。本研究では、粒子数が有限の系において、熱平衡状態を初期状態として数値シミュレーションによって系の時間発展を追い、有限サイズからくる揺らぎのダイナミクスを調べた。この結果、系が熱平衡状態にあるにも関わらず、揺らぎの大きさがあるレベルから別のより大きなレベルへと時間的に変化することを観測した。熱平衡状態は定常であり時間的に変化しないと考えられているため、一見この現象は奇異に見えるが、カシミール保存量の観点から以下のように説明することができる。まず、カシミール保存量は、マクロな視点で系のダイナミクスを分布として観た場合に得られる保存量である。このマクロな視点を導入する際には、系を構成する粒子の数が無限であると仮定している。この仮定のもとでは、カシミール保存量は厳密に保存する。しかし粒子数が大

きい有限な場合には、カシミール保存量は近似的には保存するが厳密には保存しないと考えられる。つまり、ある時間スケールまではカシミール保存量が存在する状況でのダイナミクスに従うが、より長い時間スケールでは厳密には保存しないことが観測にかかり、この結果、熱平衡状態における揺らぎレベルの時間変化が起こったと理解できる。

(5) 系のダイナミクスへの理解をさらに深めるという観点からの研究成果もいくつか得られた。時間が経ってもマクロな変化が起こらない状態を定常状態といい、また小さい擾乱に対して元の状態の近くに居続けるとき定常状態は安定という。一方、定常状態に対する小さい擾乱が状態を大きく変化させるとき、定常状態は不安定であるという。本研究では、安定な場合と不安定な場合のそれぞれについての成果を得ている。成果について述べる前に、定常状態は空間的に一様な状態と、空間的に非一様な状態に分類することができ、理論的には後者の扱いは前者よりも難しくなることを指摘しておく。まず安定な定常状態については、空間的に一様な状態においては昔からランダウ減衰と呼ばれる現象が起こることが知られていた。ランダウ減衰とは、安定定常状態に与えた擾乱が速く減衰する現象である。本研究ではこの減衰現象を、空間的に非一様な状況へ拡張することに成功している。この拡張によって、空間的に非一様な場合には、ランダウ減衰と同様の速い減衰を起こす一方で、より遅い減衰も引き起こすことがわかった。一方で不安定な定常状態については、小さい擾乱を与えたときにどのような状態に行き着くかという問題が考えられる。この問題に対しても空間的に一様な状況での結果は知られていたが、本研究では空間的に非一様な状況へと拡張することができた。また、安定な定常状態の近くに不安定な定常状態が存在するか、という問題についても、空間的に一様な場合は肯定的に解決されていた。本研究では、簡単な系についてはあるが、空間的に非一様な場合については否定的に解決されることを示した。

(6) 非相加系には、銀河などの重力系やプラズマなどの電磁気系のほかに、二次元オイラー流体と呼ばれる流体系がある。またこれまで考えていたハミルトン系を離れば、数学的な類似性から、結合振動子系と呼ばれる散逸系への応用も可能である。本研究では、パターンがない二次元オイラー流体系に擾乱を与えたときに、擾乱によって自発的にパターンが形成されるための条件を求めることができた。また結合振動子系は散逸系ではあるが相転移に似た分岐という現象を見せることが知られており、ハミルトン系の研究で得られた知見を応用することにより新しい分岐パターンを得ることができた。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 14 件)

① Y. Y. YAMAGUCHI, Strange scaling and relaxation of finite-size fluctuation in thermal equilibrium, *Physical Review E*, 査読有, 94 巻, 012133 (2016).

DOI: 10.1103/PhysRevE.94.012133

<http://hdl.handle.net/2433/216149>

② J. BARRÉ, D. MÉTIVIER and Y. Y. YAMAGUCHI, Trapping scaling for bifurcations in the Vlasov systems, *Physical Review E*, 査読有, 93 巻, 042207 (2016).

DOI: 10.1103/PhysRevE.93.04220

<http://hdl.handle.net/2433/210248>

③ S. OGAWA and Y. Y. YAMAGUCHI, Landau-like theory for universality of critical exponents in quasistationary states of isolated mean-field systems, *Physical Review E*, 査読有, 91 巻, 062108 (2015).

DOI: 10.1103/PhysRevE.91.062108

<http://hdl.handle.net/2433/199680>

④ S. OGAWA, J. BARRÉ, H. MORITA and Y. Y. YAMAGUCHI, Dynamical pattern formation in two-dimensional fluids and Landau pole bifurcation, *Physical Review E*, 査読有, 91 巻, 063007 (2014).

DOI: 10.1103/PhysRevE.89.063007

<http://hdl.handle.net/2433/188947>

⑤ S. OGAWA and Y. Y. YAMAGUCHI, Nonlinear response for external field and perturbation in the Vlasov system, *Physical Review E*, 査読有, 89 巻, 052114 (2014).

DOI: 10.1103/PhysRevE.89.052114

<http://hdl.handle.net/2433/197440>

⑥ S. OGAWA, A. PATELLI and Y. Y. YAMAGUCHI, Non-mean-field critical exponent in a mean-field model: Dynamics versus statistical mechanics, *Physical Review E*, 査読有, 89 巻, 032131 (2014).

DOI: 10.1103/PhysRevE.89.032131

<http://hdl.handle.net/2433/187358>

⑦ J. BARRÉ and Y. Y. YAMAGUCHI, On algebraic damping close to inhomogeneous Vlasov equilibria in multi-dimensional spaces, *Journal of Physics A*, 査読有, 46 巻, 225501 (2013).

DOI: 10.1088/1751-8113/46/22/225501

⑧ S. OGAWA and Y. Y. YAMAGUCHI, Linear response theory in the Vlasov equation for homogeneous and for inhomogeneous quasistationary states, *Physical Review E*, 査読有, 85 巻, 061115 (2012).

DOI: 10.1103/PhysRevE.85.061115

<http://hdl.handle.net/2433/157926>

[学会発表] (計 19 件)

① Y. Y. YAMAGUCHI, Relaxation of finite-size fluctuation in thermal equilibrium, 9<sup>th</sup> Dynamics Days Asia Pacific, 2016 年 12 月 17 日, 香港(中国).

② Y. Y. YAMAGUCHI, Relaxation of finite-size fluctuation in thermal equilibrium, *Interdisciplinary Applications of Nonlinear Science*, 2016 年 11 月 4 日, 鹿児島大学 (鹿児島県・鹿児島市).

③ Y. Y. YAMAGUCHI, Relaxation of finite-size fluctuation in thermal equilibrium, *Conference on Long-Range-Interacting Many Body Systems: from Atomic to Astrophysical Scales*, 2016 年 7 月 29 日, トリエステ(イタリア).

④ 山口義幸, 古典平均場系の特殊性と応用可能性, 大自由度分子系における化学反応機序の理解と制御, 2015 年 10 月 31 日, 北海道大学 (北海道・札幌市).

⑤ Y. Y. YAMAGUCHI, Response and critical exponents in Vlasov systems, *Workshop on dynamical systems and computations 2015*, 2015 年 3 月 5 日, 北海道大学 (北海道・札幌市).

⑥ Y. Y. YAMAGUCHI, Nonlinear response theory in long-range Hamiltonian systems, *Workshop: Advances in Nonequilibrium Statistical Mechanics: Large deviations and long-range correlations, extreme value statistics, anomalous transport and long-range interactions*, 2014 年 5 月 27 日, フィレンツェ (イタリア).

⑦ Y. Y. YAMAGUCHI, Linear response theory in one-dimensional Vlasov systems, *CECAM Workshop: Equilibrium and out-of-equilibrium properties of systems with long-range interactions*, 2012 年 8 月 29 日, リヨン (フランス).

[その他]

ホームページ等

<http://yang.amp.i.kyoto-u.ac.jp/~yyama/>

## 6. 研究組織

(1) 研究代表者

山口 義幸 (YAMAGUCHI, Yoshiyuki)  
京都大学・大学院情報学研究科・助教  
研究者番号：40314257