

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 9 日現在

機関番号：24506

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23560076

研究課題名(和文)非整数階微積分の工学応用

研究課題名(英文)Engineering Application of Fractional Calculus

研究代表者

黒田 雅治 (KURODA, Masaharu)

兵庫県立大学・大学院工学研究科・教授

研究者番号：60344222

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,200,000円

研究成果の概要(和文)：通常は整数である微積分の階数を非整数に拡張した非整数階微積分を振動制御工学に応用した。非整数階微積分の定義式を離散化したアルゴリズムをデジタル信号処理器にダウンロードして、1つのセンサからの信号を非整数階微積分するシステムを構築した。また、複数の変位・速度センサからの信号を線形結合して非整数階微積分応答に変換する手法も考案した。非整数階PID制御を用いて、柔軟な片持ち梁の振動制御実験を行なった。従来のPID制御と比較して、同等の制御性能を達成しながら、パラメータ変動に対するロバスト安定性に優れることを明らかにした。

研究成果の概要(英文)：Fractional calculus in which the order of the differentiation/integration is expanded to a non-integer value is applied to vibration control engineering. First, the definition of the fractional differentiation/integration is discretized. Then its algorithm is downloaded to a digital signal processor (DSP). The output signal from one sensor can be differentiated/integrated to a fractional order with the DSP. Furthermore, a technique is developed by which a linear combination of the output signals from multiple displacement and velocity sensors is converted into a fractional differentiation/integration response. Finally, vibration control experiments of a flexible cantilevered beam are conducted using fractional PID feedback control. In contrast to conventional PID feedback control, the fractional PID feedback control can achieve not only the equivalent vibration-suppression effect, but also better robust stability against parameter variation.

研究分野：機械力学・計測制御

キーワード：微積分 振動 制御 PID制御 柔軟構造物 ロバスト性

1. 研究開始当初の背景

高校で微積分を学習して以来、1階積分や2階微分と言った整数階の微分や積分については皆慣れ親しんできた。フラクショナル・カリキュラス(非整数階微積分)とは、整数階の積分と微分とを非整数階に拡張したものであり、微積分学の創立者の1人ライプニッツにまでそのアイデアの起源を遡ることができ、約300年の歴史を有する。数学的には完成の域に達しているものの、応用、特に工学的応用は少なかつた。

しかし、特にここ20~30年の間に工学的応用についても熱心に研究されるようになった。現在では、工学的応用を目指して、非整数階微積分と制御理論との関連を扱った論文が非常に多く登場している。非整数階微積分で記述される運動方程式は、従来の運動方程式よりもよりずっと広い領域のダイナミクスを表現でき、制御工学においては、ラプラス変換の変数 s の整数冪の多項式の分数形で記述される従来の伝達関数を用いては実現できない制御則が実現できる。

理論的な研究は大いに進展している。しかし、実験的な研究の数は多いとは言えない。

2. 研究の目的

非整数階微積分によって記述されるダイナミクスを制御工学に導入し、その制御性能について片持ち梁の振動制御問題を対象に解明する。最も簡素な機械構造物の例である柔軟なカンチレバーを対象として、非整数階微分応答が測定できるか否か、振動制御に応用できるか否か、全て実験にて検証する。

3. 研究の方法

機械構造物のある点での動的応答の非整数階微分・積分を得るには、特殊なアナログ電子回路デバイスなどの実装技法が要求されるため、技術的困難を惹起する。

本研究では、非整数階微積分の定義式を離散化した近似式に基づいて設計されたデジタル・フィルタを用いてセンサからの出力信号を非整数階微分する方法、および、構造物のある点での非整数階微分応答をその構造物上の複数の点における変位信号と速度信号の線形結合から構成する方法を用いて、この困難を乗り越える。そのため、従来の変位センサ、速度センサ、加速度センサを用意すれば事足りる。

4. 研究成果

(1) 制御対象と制御系

その支持部において変位加振される片持ち梁を振動制御の対象とする。図1は実験装置の概略図である。薄肉の梁が片持ち梁状に支持されており、その支持部が動電型加振器で変位加振されている。制御系は、レーザ変位計をセンサ、圧電素子をアクチュエータ、デジタル信号処理器(DSP)を制御器として構成されている。

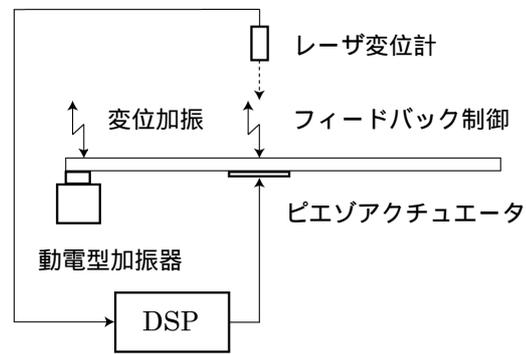


図1: 実験装置概形図

(2) 1センサ法

非整数階微分の複数の定義にはリーマン・リウヴィルの定義やカプートの定義なども含まれるが、実験で取得したサンプリングされた時刻歴データをそのまま使い易いので、本論文ではグリュンバルト・レトニコフの定義を用いる。

グリュンバルト・レトニコフの微分法は、整数階の微分を実数階の微分に拡張した定義である。式(1)はグリュンバルト・レトニコフの定義を表している。

$${}_a^G D_t^q f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^q} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(q-k+1)} f(t-kh) \quad (1)$$

ここで、 D は微分演算子、 q は非整数の微分階数を表している。式(1)は、関数 f が n 階微分可能という条件の下、式(2)に変わる。

$${}_a^G D_t^q f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-q+1)} (t-a)^{k-q} + \int_a^{(t-\tau)^{n-q-1}} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (2)$$

式(2)を工学的に取り扱うために、時間 t を離散化する。式(2)は、 $n=1, 0 < q < 1$ の条件の下、 $T=t-a$ さらに $a=0$ とおいて、以下の通り離散化される。

$${}_0^G D_t^q f(t) = \frac{T^{-q} N^q}{\Gamma(2-q)} \left[\frac{(1-q)f(0)}{N^q} + \sum_{j=1}^{N-1} \left\{ \left(f\left(t - \frac{jT}{N}\right) - f\left(t - \frac{(j+1)T}{N}\right) \right) \left((j+1)^{1-q} - j^{1-q} \right) \right\} \right] \quad (3)$$

式(3)に示された非整数階微分の数値計算方法はL1アルゴリズムと呼ばれる。L1アルゴリズムに基づいて設計したSimulinkモデルをDSPにダウンロードし、実験で得られたセンサからの出力信号に対して非整数階微分が実行される。

(3) 複数センサ法

片持ち梁を対象に、梁のたわみの非整数階微分応答を複数個所での変位・速度情報の測定結果の線形結合として算出する手法について説明する。

強制加振される片持ち梁の運動方程式を、非整数階、ここでは例として1/2階微分の微分方程式へと拡張したのが次式である。

$$D^{1/2}\tilde{\tau}(t) + \tilde{A}\tilde{\tau}(t) = \tilde{g}(t) \quad (4)$$

ただし、 \tilde{A} 、 $\tilde{\tau}(t)$ 、 $\tilde{g}(t)$ は、それぞれ、拡張されたシステム行列、拡張された時間関数、拡張された外力を示している。

式(1)で表される系の応答は次式で記述できる。

$$\tilde{\tau}(t) = \tilde{\Phi}\eta(t) \quad (5)$$

ただし、 $\tilde{\Phi}$ 、 $\eta(t)$ は、それぞれ、系の固有モードを並べた行列、モード座標である。ただし、得られた固有モードの内、リーマン面の主値平面上に存在する固有値、つまり正の実部を有する固有値に対応する固有モードのみを $\tilde{\Phi}$ の成分として選ぶことにする。

ここで、次のような2つのベクトルを定義する。

$$\tau_A(t) = [\dot{\tau}_1(t) \quad \dot{\tau}_2(t) \quad \tau_1(t) \quad \tau_2(t)]^T, \quad (6)$$

$$\tau_B(t) = [D^{3/2}\tau_1(t) \quad D^{3/2}\tau_2(t) \quad D^{1/2}\tau_1(t) \quad D^{1/2}\tau_2(t)]^T$$

すると、以下の関係が成立する。

$$\tau_A(t) = \Phi_A \eta(t), \quad \tau_B(t) = \Phi_B \eta(t) \quad (7)$$

ただし、 Φ_A は $\tau_A(t)$ に関連した $\tilde{\Phi}$ の行を抽出して作り出した小行列であり、一方、 Φ_B は $\tau_B(t)$ に関連した $\tilde{\Phi}$ の行を抽出して作り出した小行列である。

すると、 $\tau_A(t)$ 、 $\tau_B(t)$ を用いてセンサ位置 x_1 、 x_2 での片持ち梁のたわみ y_1 、 y_2 とその時間微分は次式で表せる。

$$y_A = Y\tau_A, \quad y_B = Y\tau_B \quad (8)$$

ただし、

$$y_A = \begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \quad y_B = \begin{bmatrix} D^{3/2}y_1(t) \\ D^{3/2}y_2(t) \\ D^{1/2}y_1(t) \\ D^{1/2}y_2(t) \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1(x_1) & Y_2(x_1) & 0 & 0 \\ Y_1(x_2) & Y_2(x_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_1(x_1) & Y_2(x_1) \\ 0 & 0 & Y_1(x_2) & Y_2(x_2) \end{bmatrix} \quad (9)$$

であり、ここで Y_i は片持ち梁の i 次のモード関数である。式(7)、(8)、(9)より、最終的に次式を得る。

$$y_B = Y\Phi_B\Phi_A^{-1}y_A = \Psi y_A \quad (10)$$

Ψ に含まれる成分は全て実数であり、上式より左辺の非整数階微分応答は、片持ち梁上の複数の位置における変位と速度の線形結合で表されることが分かる。

非整数階微分の定義式から理論的に導出した応答と比較して、複数センサ法によって求めた応答の振幅と位相差をボード線図として表現する。なお、センサの設置位置は自

由端と梁中央部とした。

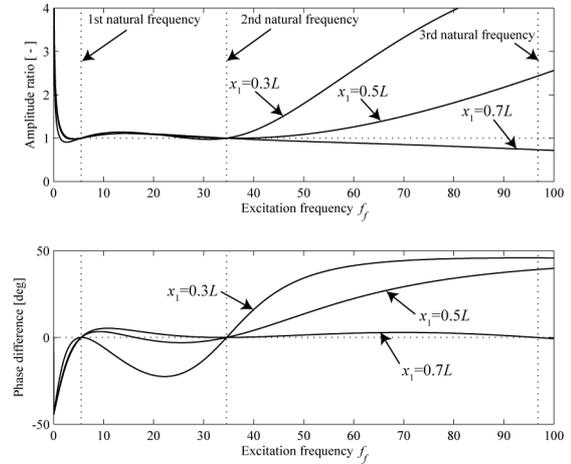


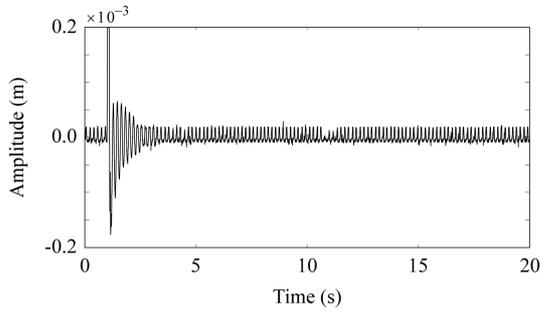
図2：センサ位置による振幅誤差と位相誤差の加振周波数変化

図2では、定義式から理論的に導出した応答波形と複数センサ法によって求めた応答波形の間の振幅比と位相差をプロットしてある。つまり、振幅比が1に近いほど、位相差が 0° に近いほど、2つの応答波形は類似した波形であることを示している。図中、中央のセンサ位置を $0.3L$ 、 $0.5L$ 、 $0.7L$ (L は片持ち梁の長さ)と変更した結果を示している。

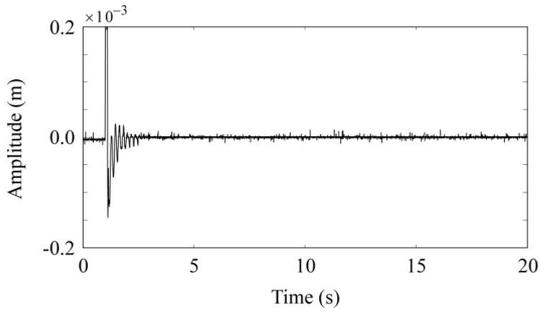
提案手法で得られた非整数階微分応答は、加振外力の周波数に依存して測定精度が大きく変化し、センサ位置によってボード線図は大きく異なる。センサ位置を調整することで、工学的に有効な精度に収まる加振周波数範囲を拡張することができる。

(4) 実験

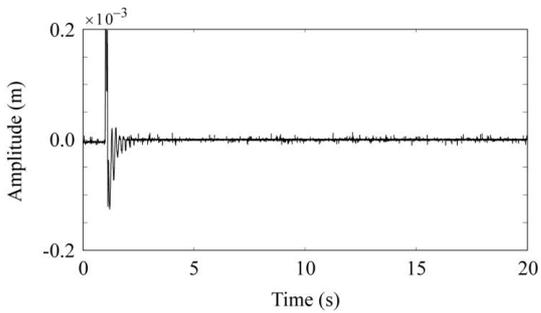
実験に用いたアルミニウム合金 (A5052) 製の片持ち梁の諸元は、長さ285mm、幅20mm、厚さ0.60mmで、重さは約9.2gである。実験では、この片持ち梁の1次の共振ピークは5.22Hz、2次の共振ピークは26.8Hz、3次の共振ピークは82.5Hzであった。まず、この片持ち梁を、外乱を加える動電型加振器に取り付ける。変位出力をレーザ変位計を用いて計測する。つぎに、その変位信号を、L1アルゴリズムがインストールされた制御器に送る。L1アルゴリズムは、MATLAB、Simulink、Real Time Workshopといったソフトウェアを用いてプログラムされている。制御器は、202タップのFIRフィルタとしてDSPを用いて実現されている。サンプリング周波数は1kHzに設定されている。このようにして信号は非整数階に微分される。最後に、圧電素子アクチュエータが、非整数階微分された応答信号によって駆動され、片持ち梁の振動をフィードバック制御する。非整数階微分応答を用いたPDフィードバック制御をf-PDフィードバック制御と略記し、従来のPDフィードバック制御と区別する。



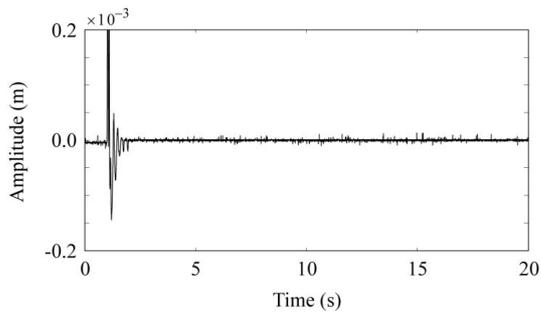
(a) $q=0.5$



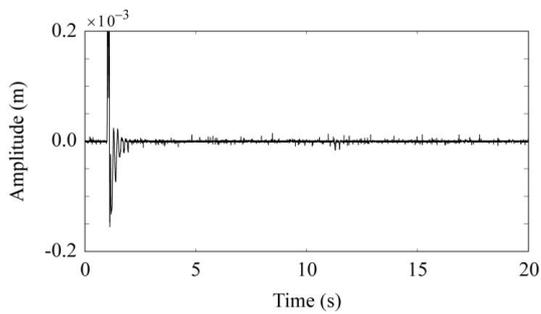
(b) $q=0.6$



(c) $q=0.7$



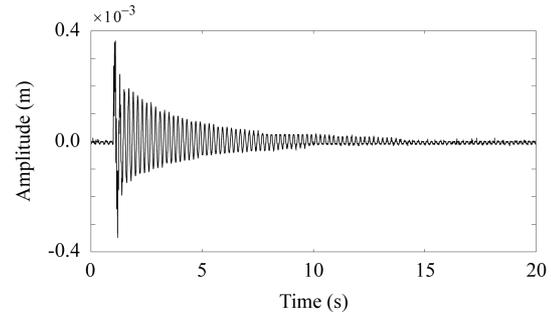
(d) $q=0.8$



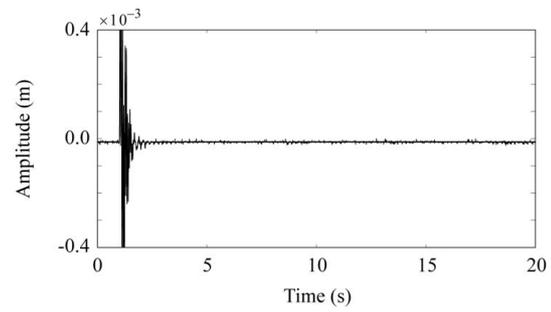
(e) $q=0.9$

図3：非整数階微分階数 q の違いによるインパルス応答の変化（実験）

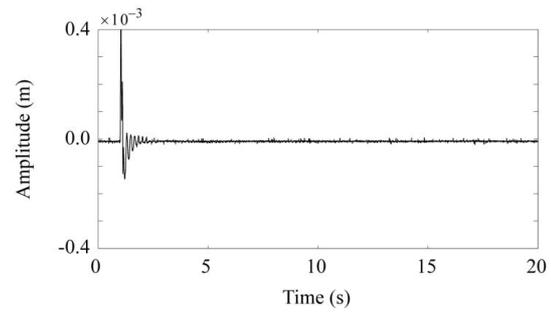
図3は、異なる非整数階微分階数 q の f-PD フィードバックを用いたインパルス応答の実験結果である。非整数階微分階数は 0.5 から 0.9 まで 0.1 刻みである。実験では、フィードバックゲイン K_P と K_D は、それぞれ 1.0 と 1.0 に設定した。



(a) Open loop



(b) PD feedback ($K_P=1.0, K_D=0.15$)

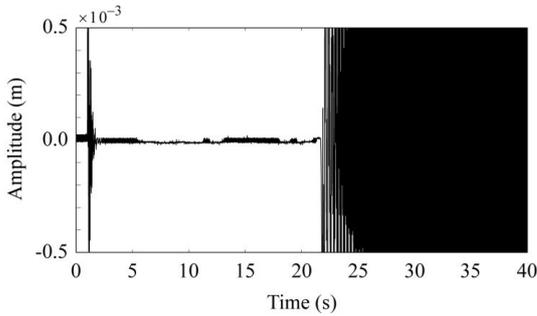


(c) f-PD feedback ($K_P=1.0, K_D=1.0$)

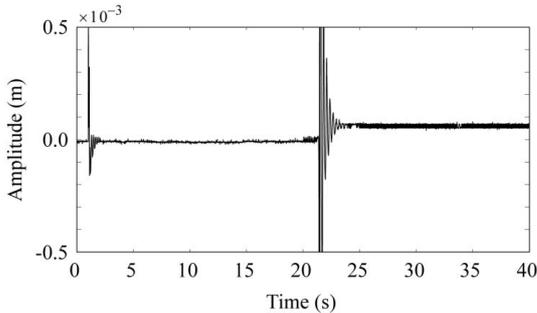
図4：非制御時、PD 制御時、f-PD 制御時のインパルス応答（実験）

図4は、非制御時、PD フィードバック制御時、f-PD フィードバック制御時のインパルス応答の実験結果である。PD フィードバックにおいて、できるだけ効率の良い振動抑制を達成するため、変位フィードバックゲイン K_P と速度フィードバックゲイン K_D は試行錯誤で決定した。f-PD フィードバックにおいては、フィードバックゲイン K_P と K_D は、f-PD

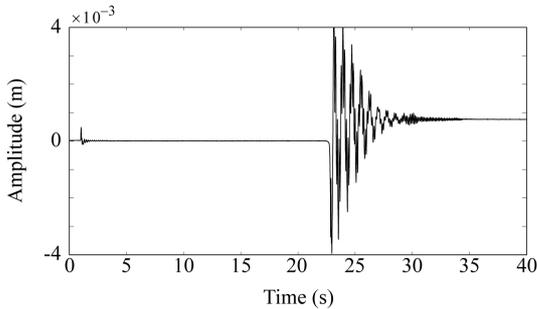
フィードバックが PD フィードバックと同等の振動抑制効果を持つように、試行錯誤で求めた。非整数階微分階数 q は 0.7 に選んだ。



(a) PD feedback ($K_p=1.0$, $K_D=0.15$, mass=4.0 g)



(b) f-PD feedback ($K_p=1.0$, $K_D=1.0$, mass=4.0 g)



(c) f-PD feedback ($K_p=1.0$, $K_D=1.0$, mass=38.0 g)

図5：質量を付加したときの PD 制御時と f-PD 制御時のインパルス応答（実験）

図5も、PD フィードバックと f-PD フィードバックによるインパルス応答の実験結果を示している。この場合、制御中およそ 22 秒の時に質量が片持ち梁先端に付加される。

(5) 考察

図3は、f-PD フィードバックの場合におけるインパルス応答の非整数階微分階数に対する依存性を示しており、図4は、インパルス応答に現れる PD フィードバックと f-PD フィードバックのノミナル制御性能を示しており、そして図5は、PD フィードバックと f-PD フィードバックの質量付加に対するロバスト安定性を示している。

インパルス応答 (f-PD で $q=0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$)

図3から、非整数階微分階数に依存して、インパルス応答に現れる差異の種類は容易にわかる。 $q=0.5$ の場合、振動抑制効果はその他の場合に比べて悪い。しかし、 q が 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 の場合は、振動抑制効果において特に重要な相違は見いだせない。それゆえ、その中から代表として $q=0.7$ を選択することも可能だろう。

インパルス応答 (PD 対 $q=0.7$ の f-PD)

図4において、フィードバックゲインは、同等の振動抑制効果を与えるものを実験的に決めることができる。PD フィードバックにおいては、 $K_p=1.0$ で $K_D=0.15$ であり、f-PD フィードバックにおいては、 $K_p=1.0$ で $K_D=1.0$ である。ノミナル制御性能において、PD フィードバックと f-PD フィードバックのどちらが優れているかを決定するのは難しい。

片持ち梁の質量におけるパラメータ変動

図5において、PD フィードバックにおいては、フィードバックゲイン K_p と K_D は、それぞれ、1.0 と 0.15 に設定した。f-PD フィードバックにおいては、フィードバックゲイン K_p と K_D は、それぞれ、1.0 と 1.0 に設定した。インパルス入力の後、残留振動が消滅した時、PD フィードバックと f-PD フィードバックのそれぞれが、パラメータ変動がない場合には安定であることが証明される。そして、その後に質量が片持ち梁の先端に付加される。たった 4g の質量（片持ち梁の質量の 43.5%）が付加されても、PD フィードバックは不安定に転じ、振動は発散する。対照的に、38g（片持ち梁の質量の 413.0%）もの質量が付加されても、f-PD フィードバックは不安定化することなく、振動は収束する。f-PD フィードバックは PD フィードバックよりもロバスト安定性に関して優れている。

上記の結果によれば、PD フィードバックと同等のノミナル制御性能を有する f-PD フィードバック制御系を構築できたと理解できる。さらに、f-PD フィードバックは、質量を片持ち梁に付加するというパラメータ変動に対して、PD フィードバックよりもロバスト安定性の意味で優れている。結果として、f-PD フィードバックが PD フィードバックと同じ振動制御効果を有するという条件下で、従来の PD フィードバック制御ではなく、非整数階微分に基づく PD フィードバック制御を適用することは工学的に重要であると結論できる。

(6) 結言

非整数階微分を振動制御分野に応用した。f-PD フィードバック制御を用いて柔軟片持ち梁の振動制御実験が実行された。その結果、従来の PD フィードバックと同じノミナル制御性能を有する f-PD フィードバック制御系を実験的に構築できた。さらに、質量付加実

験を通じて、パラメータ変動に対するロバスト安定性の意味で、f-PD フィードバックが従来の PD フィードバックよりも優れていることを実験的に証明した。

将来課題としては、複数センサ法における、使用センサ数とセンサ配置の同時最適化、非整数階微分階数とフィードバックゲインの同時最適化とともに、f-PID フィードバック制御のロバスト性に関する理論解析が挙げられる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計3件)

— Kuroda, M. and Matsubuchi, H. (2014), Vibration Control Using Fractional Derivative Feedback, Proc. of 8th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2014), 査読有, Paper-ID 415.

— Kuroda, M. (2014), Vibration Control Using Fractional Derivative Feedback, Congress Abstracts of 17th U.S. National Congress on Theoretical and Applied Mechanics, 査読有, Abstract: D-15-980.

— Kuroda, M., THE FRACTIONAL DERIVATIVE AS A COMPLEX EIGENVALUE PROBLEM, Proc. of IUTAM Symposium on Dynamics Modeling and Interaction Control in Virtual and Real Environments, 査読有, Springer pp.109-117, (2011).

〔学会発表〕(計9件)

吉谷尚樹, 松淵博基, 黒田雅治 (2015.8.27), 非整数階微分を用いた振動制御 (第3報: 柔軟構造物の変位・速度情報を用いた分数階微分応答の計測), 日本機械学会 D&D 2015, 弘前大学 (青森)。

松淵博基, 吉谷尚樹, 黒田雅治 (2015.8.27), 非整数階微分を用いた振動制御 (第2報: PD 制御の拡張とその制御効果の検証), 日本機械学会 D&D 2015, 弘前大学 (青森)。

Kuroda, M., Matsubuchi, H. and Yoshitani, N. (2015.8.5), Vibration Control Experiment using Fractional PID Feedback, ASME 2015 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference (IDETC/CIE 2015), ボストン (米国)。

黒田雅治 (2015.3.28), 非整数階 PID 制御による振動制御実験, 2014 年度力学系の応用研究集会, 京都大学 (京都)。

松淵博基, 荒木 望, 黒田雅治 (2014.8.28), 非整数階微分を用いた振動制御 (第1報: 理論解析および数値計算による検討), 日本機械学会 D&D 2014, 上智大学 (東京)。

Kuroda, M., Matsubuchi, H. and Araki, N. (2014.8.18), Vibration Control Using Fractional Derivative Feedback, ASME 2014 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference (IDETC/CIE 2014), バッファロー (米国)。

Kuroda, M. and Matsubuchi, H. (2014.7.8), Vibration Control Using Fractional Derivative Feedback, 8th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2014), ウィーン (オーストリア)。

Kuroda, M. (2014.6.17), Vibration Control Using Fractional Derivative Feedback, 17th U.S. National Congress on Theoretical and Applied Mechanics, イーストランシング (米国)。

黒田雅治 (2013.3.26), ある分数階微分方程式の解き方, 2012 年度力学系の応用研究会, 早稲田大学 (東京)。

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.eng.u-hyogo.ac.jp/outline/faculty/kuroda/index.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

黒田 雅治 (KURODA, Masaharu)
兵庫県立大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号: 60344222

(2) 研究協力者

荒木 望 (ARAKI, Nozomu)
松淵 博基 (MATSUBUCHI, Hiroki)
吉谷 尚樹 (YOSHITANI, Naoki)