様式Ｆ－１９

科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）研究成果報告書

平成 25 年　6 月　7 日現在

機関番号：13102
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2011　～　2012
課題番号：23650005
研究課題名（和文）　非可換調和解析による隠れ手順抽出
研究課題名（英文）　Extracting a hidden procedure by non-commutative harmonic analysis
研究代表者
武井 由智（TAKEI YOSHINORI）
長岡技術科学大学・工学部・准教授
研究者番号：９０３１３３３７

研究成果の概要（和文）：

非可換調和解析による隠れ手順抽出への道程として、非可換群を定義域とする信号の重要な特徴をそのフーリエ展開から抽出する手法を次の通り示した。(1) 二面体群上の信号の周波数領域での取り扱いを計算量の少ない、畳み込み演算で行う手法。(2) ３次元回転群上の関数の滑らかな成分が特定周波数成分に集中することを利用し、離散的なメッシュ上で定義された信号をより細かいメッシュ上の関数に変換する際の補間法。(3) n 個の対象の順列（置換）のなす群上の関数の特徴抽出として、その関数が 1, 2, ..., n という対象のラベルを貼り換えたときにどれだけの影響を受けるかを定量化する手法。

研究成果の概要（英文）：

As a step toward establishment of the way to extract a hidden procedure by using non-commutative harmonic analysis, this research presented several methods which extract some important features of signals defined over a non-commutative group from their Fourier expansion, such as: (1) A method which operates a given signal over a dihedral group in its frequency domain, by an efficient convolution (2) An interpolation method which transform the domain of a signal which is a discrete mesh in the 3-dimensional rotation group into a more finer mesh, exploiting the concentration of the contribution from smooth component of the signal to certain components in the frequency domain (3) A method that provides a quantitative measure representing to what extent a function over the group of permutations of n objects is affected by the change of the labeling of objects by 1, 2, …, n.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
交付決定額	2,000,000	600,000	2,600,000

研究分野：計算機科学
科研費の分科・細目：情報学基礎
キーワード：　フーリエ解析，対称群，回転群，二面体群，調和解析，フィルタ，学習，指標

１．研究開始当初の背景

(1) 調和解析の工学的応用

調和解析（フーリエ解析）は，時間につれて変動する関数を，単純な振動を行う関数に分解して理解する行為と捉えることができる．例えて言えば，音の高さの異なる沢山の音叉を用意しておき，それぞれの音叉の音の大きさをうまく調整して同時に鳴らし，ある楽器

の音色を再現することに相当する．その楽器の振動，つまり時間tによる変位を $f(t)$とし，音叉は $0,1,2,\ldots,k,,,,,n-1$ のn本あって，それぞれ単位時間に $0,1,2,\ldots,k,\ldots,n-1$回振動するとする．$k$は周波数と呼ばれる．それぞれの音叉の音の大きさ（振幅）を$a(0),a(1),a(2),\ldots,a(k),\ldots,a(n-1)$ に設定したときに元の楽器の音$f(t)$が再現できたとする．このとき，$a(k)$は信号$f(t)$の周波数kにおける Fourier （フーリエ）係数と呼ばれる．調和解析は，音声信号の解析や加工のみならず，画像信号の解析，加工，圧縮にも広く応用されている．計算機上で処理を行う際には，あらかじめ$t=0,1,2,\ldots,n-1$ といった離散的時刻において$f(t)$を取得しておき(このとき単位時間は十分短くとる)それを離散フーリエ変換してフーリエ係数$a(k)$ $(k=0,\ldots,n-1)$を得る．あるひとつの周波数kにおける$a(k)$ は$f(t)$と周波数kの複素指数関数の各tにおける値の積和（内積とよぶ）であり，ある意味で各時刻$t=0,1,2,\ldots,n-1$の情報を平等に拾っている．これを各周波数$0,1,2,．.k,，n.–,1$に対して計算することになる．その効率的計算のための高速フーリエ変換と呼ばれる算法が広く知られている．

⑵ 学習・特徴抽出への調和解析応用

計算機科学の分野において，画像や音声といったアナログ信号を離散化した信号とは全く異なった対象に対して調和解析の応用が研究されてきている．まず，1990 年代の初頭に Kushilevitz と Mansour が未知論理関数の例題による教師付き学習に調和解析が応用できることを示している．この問題設定では，関数$f(t)$は論理関数である．つまり，yes か no かの真理値をm個入力するとそれらの AND, OR, NOT 演算を経て yes か no が一つ出力される．ここで入力 tはもはや整数時刻ではなく，$\{0,1\}$のいずれかの値をとるm次元ベクトルである．対応して周波数kも$\{0,1\}$からなるm次元ベクトルとなる．$f(t)$の可能な入力は2^m通りある．もしこの起こり得る2^m通りの入力tに対する$f(t)$の値を全部知っていれば，全2^m個のフーリエ係数$a(k)$ を得ることができる．さらに，もしフーリエ係数を全部記録しておけば，$f(t)$の全てのtにおける値はフーリエ逆変換により完全に再現できる．ここで彼らが示したことは，もし$f(t)$がある意味で「易しい」関数であれば，2^mよりもずっと少ない個数のtに対する$f(t)$の抜き取り検査で，$a(k)$ の定義式（内積）を良く近似する実験積算値が計算でき，また限られた個数のkに対する$a(k)$ の近似値から，フーリエ逆変換により，任意の入力tに対する$f(t)$の値を近似できることである．彼らはこのことを利用し，内部構成が未知である論理関数$f(t)$の限られた個数の入出力対を観察するのみで，$f(t)$の未知入力tに対する出力を推定する仕組み（すなわち，$f(t)$に対する教師付学習の仕組み）を提案している．計算機科学における別の方向の進展として，2002 年に Gilbert, Guha, Indyk, Muthukrishnan, Strauss が疎フーリエ表現アルゴリズムを提案している．この問題設定では，時間tと周波数kはふたたびいずれも$0,1,2,\ldots,n-1$の値をとり，信号$f(t)$は実数値あるは複素数値をとる．彼らはフーリエ係数，$a(0),a(1),a(2),\ldots,a(k),\ldots,a(n-1)$ のうち絶対値が大きいもの少数個を近似的に計算することは，nよりもずっと少ない個数のtに対する$f(t)$の抜き取り検査で達成できることを示している．これは$f(t)$の重要な特徴である主要フーリエ係数を効率的に抽出できることを意味する．このアルゴリズムは，畳みこみ演算（工学的にはフィルタ処理という）で$f(t)$のフーリエ係数を効率良く操作できることを活用している．疎フーリエ表現アルゴリズムに対する改良がごく最近に提案されている．

⑶ 非可換調和解析と応用

ここまでに紹介したフーリエ解析は，可換群上の調和解析と呼ばれる．その意味は，時間域における操作の順序を入れ換えることが可能ということである．たとえば，$f(t)$に対する$f(t+p)$は時間をpだけ進める操作を受けた信号であるが，まずpだけ時間を進め，さらにqだけ進めるというように操作を積み重ねると結果は$f(t+p+q)$となる．先にqだけ，つぎにpだけ進めるというように手順を入れ替えても，結果は$f(t+q+p)$ で変わらない．これは$p+q=q+p$という時間域での加法演算の可換性による．しかしながら，現実世界の多くの操作は手順を入れ換えると結果は異なってしまう．たとえば，玩具ルービック・キューブは 3 次元空間における複数の回転操作は手順の前後入れ換えに影響を受けることを教えてくれる．時間域が非可換の場合にも対応する調和解析が数学において研究されてきている．この場合，いままで述べてきた時間tの和は，非可換な群(演算で閉じた体系)におけるtの演算（積）に変更される．また，周波数kの各々は，群の「既約表現」と呼ばれるものの各々に対応するようになる．フーリエ係数$a(k)$ はもはや単純な数ではなく，正方行列に値をとる．

Diaconis は 1988 年に，n個の対象の順列（置換）のなす群（n次対称群 S_nという）上の確率分布の解析に非可換調和解析を応

用することを提案している．また，2009 年，Kondor, Shervashidze, Borgwardt は，化学構造式データベースの構築に有用な「Graphlet Spectrum」を同じく S_n 上の調和解析の応用として提案している．化学構造式検索においては，特定の分子の結合したパターンを部分構造にもつ構造式の検索が重要となる．このとき，各構造式を「頂点」が「辺」によって結合された対象，いわゆる「グラフ」と見立て，検索語は「部分グラフ」を指定することになる．このとき，形として同じグラフが，頂点への番号（ラベル）の付け方によって異なったものにみえる（同じ形なのに検索ヒットしない）ことが問題となる．たとえば四角形ABCDに対角線ACを書き加えたものと，四角形ABCD に対角線BDを書き加えたものは，グラフとして同型であるにも関わらず，計算機上で辺を頂点ラベルのペアとして記憶すると両者は計算機にとって異なったものに見えてしまう．Kondor らは非可換調和解析の巧妙な応用によって，ラベルの貼り換えに対し安定なグラフ特徴量 Graphlet Spectrum を導出している．

２．研究の目的

操作手順は多くの場合入れ換えると結果が異なるという意味で非可換な対象である．それでは，未知の操作の連鎖があり，その結果の部分的な（できれば少数個の）例の観測によって，この隠れた手順を推定（学習）すること，あるいは手順についての部分情報（特徴）を抽出することは可能なのか？という問いが生じる．

前節(2)において，可換調和解析を応用し，少ない個数の t における $f(t)$ の抜き取り検査(観測)から，$f(t)$ の未知入力に対する応答を予測する既存研究を紹介した．一方，前節(2)において，非可換調和解析を S_n 上の確率分布の解析，あるいはラベルの貼り換えに対し安定なグラフ特徴量の導出に応用した例を紹介した．

本研究の目的は，隠れた手順の学習あるいは特徴の抽出の方法を，非可換調和解析の応用で与えること、あるいはそのようなことはそもそもどの位の度合いで可能なのかの限界を探究することである．

３．研究の方法

前述の第１節，(2)の可換調和解析による効率的学習手法と同(3)の非可換調和解析による手法を融合することで，非可換な対象の学習・特徴抽出手法を導出することを基本路線とした．しかしながら，第１節，(2)で紹介した手法の細かい各段階ひとつひとつをとっても，それを第１節(3)の非可換調和解析の枠組みに移植することは自明な作業ではない．そこで，もっとも易しいと思われる非可換群から始め，可換群上の調和解析を応用した信号処理の基本手法を非可換群上に移植していくというアプローチをとった．具体的な研究の推進方法は，数式の観察による処理方式の予想，予想した方式に基づく計算機プログラム，可能な場合はその理論的裏付け（正しさを証明する）である． また，非可換な手順の，調和解析とはまた違った代数的取扱いについても研究を行った．

４．研究成果

前節の研究方法により研究を遂行，非可換群上の信号の調和解析による特徴抽出手法，あるいは手順の代数的取扱い手法，についていくつかの結果を得た．以下において［J1］［P1］等は，次節で記述する発表論文等のラベルである．

(1) 二面体群上の信号のフィルタ処理

信号 $f(t)$ を周波数領域で操作するには，フーリエ変換を行い，$a(k)$ を得て，それに必要な加工を行い(たとえば，音声信号の高音を除去したければ，0 から遠い k に対して $a(k)=0$ とゼロ化する)，フーリエ逆変換で戻せばよい．この方法は計算量がかさむため，時間域が可換である通常の信号処理では，調和解析における「畳み込み演算」に基づき，間接的に $a(k)$ を加工する．これは，通常フィルタ処理と呼ばれる．非可換調和解析においても「畳み込み演算」)が $a(k)$ の加工に利用できる基本定理はある．しかし,満足な精度で $a(k)$ を加工するのに必要な「畳み込みの点数」が非可換の場合は明らかでない．非可換群のうち非常に可換群に近い二面体群に対して，可換の場合からの類推でフィルタ処理を定義，その結果,可換の場合の３点の畳み込み点数を必要とする低域通過フィルタ処理に対し，非可換の場合は 2 倍の点数である６点で，ほぼ同等の $a(k)$ の精度を確保することが明らかとなった[P4].

(2) ランダム指数和の絶対値の評価

仮に(1)のフィルタ処理を応用して、二面体群上で第 1 節(2)で紹介した Gilbert らの疎フーリエ表現アルゴリズムの類事物を構築しようとする場合，どれだけの個数の t に対する $f(t)$ の抜き取り検査で主要フーリエ係数の近似が可能になるか

を見積もる必要がある．そのため，無作為に選んだ複数のtに対する複素指数関数の値の平均の絶対値を考察し，個数に関して指数関数的に減少する上界を示している [J1].

(3) 論理関数の形の学習

対象は非可換群ではないが，第 1 節(2)で紹介した未知論理関数の学習が関数値の予測を目指すものであったのに対し，関数の形（演算手順）をフーリエ係数 $a(k)$ から推定する手法を研究した．1つの変数が演算に最大 1 度のみ用いられる積和標準形という限定された場合において，フーリエ係数実験積算値の一部（1 次フーリエ係数と 2 次フーリエ係数）から，ある誤り確率上界をもって関数形の推定が可能であることを示している[P3].

(4) 3 次元回転群上の信号に対する補間処理

xyz 空間に直方体を置き，z 軸まわりに左回り 90 度の回転を行った後に y 軸まわりに左回り 90 度の回転を行ったものと，先に y 軸まわりに左回り 90 度の回転その後 z 軸まわりに左回り 90 度の回転を行ったものを比較すると互いに異なる．これは 3次元の回転操作の作る群が非可換であることを示している．このような群の上の信号処理は，将来の応用としてたとえば 3 次元空間での剛体運動の効率的符号化や学習をもつと考えられる．可換群を時間域とする通常の信号処理での重要な技術の一つに補間法がある；元の連続的な時間に対する信号 $f(t)$ に対し $t=0,1,2,\ldots,n-1$ といった離散時刻で $f(t)$ を記録して必要な処理を計算機で行うのがディジタル信号処理であるが，仮に後になって $t=0.5,1.5,2.5,\ldots$ といった半整数値における $f(t)$ の値が必要になったときには（その $f(t)$ の値は記録に残っていないため）整数値における $f(t)$ の情報のみを用いて半整数値における値を補間する必要がある．滑らかな補間値を得る方法の一つとして，$f(t)$ は高い周波数のフーリエ係数が 0 かそれに近いと仮定し，半整数値における $f(t)$ の値を 0 とおいて信号点数 $2n$ のフーリエ変換を行い，フーリエ係数の高周波に相当する部分をゼロ化してフーリエ逆変換を行う手法がある(ただし，実際は演算量削減のために同じ効果を持つ処理を補間フィルタとよぶフィルタの畳み込み演算で行う)．これに相当する処理を，3 次元回転群上の信号に対して構成した．3 次元回転群におけるフーリエ変換に相当するものは，Wigner D 関数展開と呼ばれるものになる．通常の可換時間域補間処理において ゼロ化すべきフーリエ係数の周波数 k の範囲が，この場合はどこに相当するのか明らかではなかったが，数値実験を通じ，Wigner D 関数（3 つの添え字をもつ）の第 1 添え字が大のところに相当する係数をゼロ化することで滑らかな補間結果を得られることを示した [P2]．ただし，この処理をより効率的な畳み込みで行うところまでは至っていない．

(5) n 次対称群上の関数のラベル依存尺度の提案

$1,2,\ldots,n$ と番号のついた n 個の対象の並べ替え操作を置換という．操作の連接を積として，置換は群を作り，それを n 次対称群 S_n と呼ぶ． S_n 上のフーリエ変換が定義されており，第 1 節 (3) 最後に述べた通り Kondor らはそれを利用して，グラフに対するラベルの貼り換えに対し安定なグラフ特徴量 Graphlet Spectrum を導出した．n 次対称群上の関数に対しても，それがラベルの貼り換えに対してどれだけ対称か（公平か）という尺度は重要と考えられる；たとえば，阿弥陀くじを考える．阿弥陀くじの縦線に $1,2,\ldots,n$ とラベルを貼ったとすると，横棒を無作為に平等に引いたとしても，左端と右端の線が端で特別であるということにより，得られる置換の分布は若干いびつであることが予想される．すなわち，1 と $n/2$ (中央)のラベルをもし交換したとすると，できる置換の分布は変かすると考えられる．ここで，阿弥陀くじを筒状にして，本来の右端と左端の縦線の間にも横棒を引くことを許したとすると，前述のいびつの度合いが少し軽減されることが期待できるが，それではある置換の分布のラベル貼り換えに対する安定度をどのように定義すればよいのだろうかという問いが生じる．この疑問に答えるため， S_n 上の関数のラベル依存尺度を提案した．提案法は以下の通り．第 1 節(3)で述べたとおり，フーリエ係数は行列の値をもつ．その対角成分の総和（トレース）を指標関数という．指標関数は，ラベルの貼り換えに関して影響を受けない関数であることが知られている．一方，ラベル貼り換えに関して不変な任意の関数は，指標関数の重ね合わせで表され，その重ね合わせの係数は原関数と指標関数の内積で計算できることが知られている．すると， S_n 上の任意の関数 $f(t)$ に対し，その指標関数の空間

への正射影（ラベル不変成分）が定義できる．このラベル不変成分をもし$F(t)$とすれば，$f(t)-F(t)$はラベル依存成分と考えることができる．そして，$f(t)-F(t)$の関数としての大きさ（ノルム）の$f(t)$のノルムに占める割合をもって，$f(t)$のラベル依存度と定義する．この尺度は指標関数との内積から計算できるため，$f(t)$の限られた個数の抜き取り検査値から，（相応の精度で近似的に）計算することができる [P1].
この尺度は，ラベル貼り換えに関して完全に安定な関数について 0 （そして指標関数の空間の直交補空間に属する関数について 1）の値をとる尺度であるが，数値実験で，筒状阿弥陀くじは通常の端がある阿弥陀くじに比べ，同一横棒本数ではラベル依存度がより小さくなる傾向があることを観測している．

(6) Max-Plus 代数による手順整理

非可換調和解析の枠組みから若干逸脱するが，複数タスクの連接からなるプロジェクトの進捗管理手法に Max-Plus 代数と呼ばれる代数構造（通常の Max 演算を和演算ととらえ，和演算を積演算と捉えて，行列代数を考える）の応用を研究，複数プロジェクトの場合の時間バッファの管理手法[J3]，時間バッファの消費の監視手法［J2］をそれぞれ提案している．

以上，非可換調和解析あるいはその周辺において，隠れ手順の抽出に必要になると思われるいくつかの手法を提案した．ただし，率直に述べれば，これらの研究結果は隠れ手順抽出という 100 歩先の目標に対する 1 歩または 2 歩の歩みであり，今後はより焦点を絞った着実な研究を根気良く行う必要があると考えられる．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 3 件）

[J1] 永田　誠，<u>武井 由智</u>: 拡散を連想させるある離散モデルの裾確率について，大阪薬科大学紀要, **7** 巻, pp. 33—39 (2013).

[J2] Truc N. T. N., <u>Takei Y.</u>, Goto H., and Takahashi, H.: Buffer Management Method for Multiple projects in the CCPM-MPL Representation, *Industrial Engineering and Management Systems*, Vol. **11**, pp. 397—405 (2012), DOI: 10.7232/iems.2012.11.4.397.

[J3] Truc, N. T. N., Goto, H., Takahashi, H., Yoshida, S., & <u>Takei, Y</u>: Critical Chain Project Management based on a Max-Plus Linear Representation for Determining Time Buffers in Multiple Project, *Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing*, Vol. 6, pp. 715—727 (2012). DOI: 10.1299/jamdsm.6.715.

〔学会発表〕（計 17 件）

[P1] 小川浩明，<u>武井由智</u>: 対称群上の未知関数のラベル依存度の抽出，平成 24 年度電子情報通信学会信越支部大会, 2012 年 10 月 13 日，新潟市，日本.

[P2] 高見大地，<u>武井由智</u>: ３次元回転群上の補間法の基礎検討，平成 24 年度電子情報通信学会信越支部大会, 2012 年 10 月 13 日，新潟市，日本.

[P3] Nurul Liyana binti Mohamad Zulkufli, <u>武井由智</u>: ランダム例題からの未知論理関数の形の学習，平成 23 年度電子情報通信学会信越支部大会, 2011 年 10 月 8 日，柏崎市，日本.

[P4] 孫継才，<u>武井由智</u>:二面体群上のフィルタ処理について，平成 23 年度電子情報通信学会信越支部大会, 2011 年 10 月 8 日，柏崎市，日本.

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
武井 由智（TAKEI YOSHINORI）
長岡技術科学大学・工学部・准教授
研究者番号：９０３１３３３７

(2)研究分担者　該当なし
(3)連携研究者　該当なし