

## 科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）研究成果報告書

平成25年 5月20日現在

機関番号：17102  
 研究種目：挑戦的萌芽研究  
 研究期間：2011～2012  
 課題番号：23650007  
 研究課題名（和文） ランダムウォークの脱乱択化

研究課題名（英文） Deterministic Random Walk

## 研究代表者

来嶋 秀治 (KIJIMA SHUJI)  
 九州大学・システム情報科学研究所・准教授  
 研究者番号：70452307

研究成果の概要（和文）：ランダムウォークの脱乱択化とは、ランダムウォークという確率過程を、同等の決定的過程で模倣しようという試みである。本課題は、乱択アルゴリズムの脱乱択化に対する新しい汎用手法の構築を将来の目標に据え、ロータールーターモデルの解析技法の開発に取り組んだ。ロータールーターモデルに関する従来研究が規則的なグラフ上の単純ランダムウォークを対象としていたのに対し、本研究では前述の動機の下、一般の推移確率行列を取り扱えるようにモデルを拡張し、分布の誤差に関する解析手法を構築した。

研究成果の概要（英文）：The rotor-router model, which is sometimes called deterministic random walk, is a deterministic process analogous to a random walk on a graph. In this project, we have investigated the rotor-router model, aiming at a new scheme for derandomization of randomized algorithms. While most previous works concerning the rotor-router model dealt with simple random walks on regular graphs, we have proposed some extended models to deal with general transition probability, and have developed techniques for analysis of discrepancies between the models and random walks.

## 交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
交付決定額	2,800,000	840,000	3,640,000

## 研究分野：総合領域

科研費の分科・細目：情報学・情報学基礎

キーワード：アルゴリズム理論

## 1. 研究開始当初の背景

アルゴリズム設計において、確率的手法は、簡便さ、性能の良さ、大数の法則に保証される頑強さを理由に、理論、実用の両側面で、もはや欠くことのできない基本的で重要な手法である。その例は、素数判定の Miller-Rabin テストや、Spielman et al.による多項式時間乱択単体法、数値積分の汎用手法マル

コフ連鎖モンテカルロ (MCMC) 法をはじめ、枚挙に暇ない。

一方で、理論/実用の両側面において、(疑似)乱数の“性能”がアルゴリズムに与える影響は小さくない。松本眞氏らの開発した Mersenne Twister 等の高性能な疑似乱数生成法はあるが、例えば、並列化計算における相関の除去などには細心の注意が必要とな

る。また、乱数生成にかかる計算コストは、乱択計算の課題の一つである。

「種々の確率的アルゴリズムにおいて、乱数に真に求める性質は何であろうか？」これが本研究の最も根源的な動機である。この疑問に対し、現状では多くのことは分かっていない。近年、乱択アルゴリズムの研究者を中心に、脱乱択化の可能性について関心が高まっており、例えば、Stefankovic, Vempala, Vigoda (FOCS11/SICOMP12)はナップサック解の数え上げに対する動的計画法を用いた脱乱択化を与えている。

本研究では、前述の疑問の究明と確率的アルゴリズムの脱乱択化に関する新しい汎用手法の構築を長期展望に据え、「ランダムウォークの脱乱択化」に特化した研究を行う。

ランダムウォークの脱乱択化とは、ランダムウォークという確率過程 (stochastic process) を、同等の決定的過程 (deterministic process) で模倣しようという試みである。ロータールーターモデルは James Propp により 2000 年ごろ提唱された決定的過程で、deterministic random walk とよばれ、マルコフ連鎖の研究者の関心を集めている。グラフの各点に多数の“チップ”がばらまかれ、各時刻において、各頂点は今あるチップ全てを隣接頂点に順々に決定的にばらまく。各頂点上のチップの個数 (正確には、各頂点のチップ数/全体のチップ数) がグラフ上のランダムウォークの“分布”を模倣する。大きな関心は、チップが1か所に固まることなく、ランダムウォークの分布をよく模倣できるかという点である。

ロータールーターモデルとランダムウォークの誤差解析に対する最初のブレークスルーは Cooper & Spencer (2006) による研究である。任意の  $d$  次元の(無限)整数格子点上のロータールーターモデルについて、各チップがランダムウォークする場合と比較し、各頂点のチップ数の差は次元  $d$  のみに依存し、チップの総数には依存しないことを示した。その後、Cooper et al. (2007) が 1 次元の場合の誤差の上界値が 2.29 であることを、Doerr & Friedrich (2009) が 2 次元の場合の上界値が 7.83 であることを示している。一方、Cooper et al. (2008) は無限の  $k$  分木に対しては、意地悪なチップ配置によりいくらでも誤差を大きくできることを示している。

## 2. 研究の目的

本研究では、確率的アルゴリズムの脱乱択化に関する新しい汎用手法の構築を目的とし、「ランダムウォークの脱乱択化」の研究を行う。

ロータールーターモデルに対する従来研究のほとんどが、数学的興味から規則的な無

限グラフ上の単純ランダムウォークを対象とするものであった。本課題では、確率的アルゴリズムの脱乱択化という目標を明確にし、対象は有限グラフとする。マルコフ連鎖を用いた種々の確率的アルゴリズムの脱乱択化を目指し、一般の推移確率行列を扱えるようにロータールーターモデルを多重グラフ上のモデルに拡張し、ランダムウォークとロータールーターモデルの分布の誤差に対する解析技法の構築を目的とする。

ロータールーターを用いた乱択アルゴリズムの脱乱択化は、他に類を見ないアプローチであり、新しい脱乱択化の汎用手法として期待できる。一方でロータールーターの歴史は浅く、いまだ解析技法はあまり多くはない。また、乱択アルゴリズムの脱乱択化の汎用手法の構築には、一般の推移確率行列を対象とする必要があり、新しい解析技法を開発が大きな課題である。

## 3. 研究の方法

本課題の最も革新的な視点は、「確率的アルゴリズムの脱乱択化」という明確な応用目標を持ってロータールーターモデルの解析に取り組む点である。この視点の長所は、目的に沿ってモデルに大胆な仮定を置くことができる点である。

本課題において、取り組むべき課題は大きく2点あげられる。ひとつは、従来研究が対象としてきた単純ランダムウォークを超えて、本課題の目的に対しては、一般の推移確率行列を扱うことのできる新しい解析技法の構築が必要である。もう一点は、特に多項式時間計算量理論の枠組みに乗せるために、“入力サイズ”の多項式サイズの誤差上界を見積もるためのモデル設計と解析の理論構築が必要である。

本研究期間内においては、特に大きく分けて以下の三つの方向で研究を行った。

- (1) 一般の有限多重グラフに対するロータールーターモデルに対し、ランダムウォークとロータールーターのチップ数の単一頂点誤算の解析に取り組んだ。
- (2) 組合せ構造に由来するグラフに対して、対数サイズの誤差算定に取り組んだ。例えば、0-1 ナップサック解やマトロイドの基交換グラフへの応用を鑑み、具体的には0-1超立方体、Johnson グラフの解析に取り組んだ。
- (3) 統計物理でよく用いられる Ising モデルの脱乱択化への応用を目指し、無理数の推移確率を含むランダムウォークを脱乱択化するための新しいモデルの構築に取り組んだ。

## 4. 研究成果

Kijima, Koga, Makino (下記参考文献[1]) では、マルコフ連鎖モンテカルロ (MCMC) 法へ

の応用を鑑み、ロータールータモデルに有向多重グラフを導入して、有理数の推移確率行列一般を対象とした。また、対象をMCMC法の脱乱択化に絞ることで、推移確率行列の半正定値性が自然に仮定でき(lazyかつreversible)、この条件下で、ランダムウォークとの各頂点ごとの分布の誤差の上界が $O(mn)$ となることを示した( $n$ は頂点数、 $m$ は枝数)。一方で、誤差が $\Omega(m)$ となるような例も与えている。

この結果を精査・洗練することで、Kajino, Kijima, Makino [2]では既約なマルコフ連鎖一般について(すなわち、半正定置性を仮定することなく)、推移確率行列の固有値と固有ベクトルで記述される上界を与えている。

また、組合せ構造に由来するグラフに対する対数サイズの誤差算定に関する研究については、Kijima, Koga, Makino [1]で $d$ 次元 $0-1$ 超立方体上の頂点誤差が $O(d^3)$ であることを示している。また、 $d$ 個の要素から $c$ 個の要素を選ぶ組み合わせ集合を頂点にもち、 $1$ 要素の交換操作を枝に持つJohnsonグラフ $J(d, c)$ に対して、 $O(c^3(d-c)^2)$ の誤差上界を与えている。Kajino, Kijima, Koga[2]はこれらの解析を改良し、 $d$ 次元 $0-1$ 超立方体上の頂点誤差上界を $O(d^2)$ 、Johnsonグラフ $J(d, c)$ 上の誤差上界を $O(c^2(d-c))$ に改善している。

多重グラフを用いたモデルでは、枝数が推移確率の値に依存して増える、あるいは無理数の推移確率を扱えないなどの問題点もあった。この点を克服するために、Shiraga, Yamauchi, Kijima, Yamashita [3]では、無理数の推移確率行列をも扱える新しい(ロータールータに似た)モデルを開発し、誤差上界を与えている。

以上の成果については、現在、下記3本の論文にまとめている。これらの論文は現在、ジャーナル/国際会議に投稿中/投稿準備中である。また、本課題の成果に対する講演依頼に応え、フォーマルな招待講演やインフォーマルなセミナー講演を行っている。海外の研究者からも関心を寄せられており、議論を通じて高い評価を得ている。

以上のとおり、本課題では、確率的アルゴリズムの脱乱択化を目指し、ランダムウォークの脱乱択化の解析技法の開発という目的に対し、萌芽的成果を得ることに成功した。この解析技法を用いて、脱乱択化の汎用手法を構築し、そして乱択アルゴリズムにおける乱数の機能と効果を究明することが今後の課題である。

#### 参考文献

[1] S. Kijima, K. Koga and K. Makino, Deterministic random walks for irrational

transition probabilities, discussion paper, 2011, 22pages.

[2] H. Kajino, S. Kijima, and K. Makino, Discrepancy analysis of deterministic random walks on finite irreducible graphs, discussion paper, 2012, 43pages.

[3] T. Shiraga, Y. Yamauchi, S. Kijima, M. Yamashita, Deterministic random walks for irrational transition probabilities, discussion paper, 2013, 30pages.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2件)

(1)Shuji Kijima, Kentaro Koga and Kazuhiisa Makino, Deterministic random walks on finite graphs, in Proceedings of the meeting of Analytic Algorithmics and Combinatorics (ANALCO 2012), 16--25.

(2)Shuji Kijima, Probability and Computation, ICNC 2011: 345-346  
2011 Second International Conference on Networking and Computing  
<http://doi.ieeecomputersociety.org/10.1109/ICNC.2011.67>

[学会発表] (計 12件)

(1)白髪丈晴, 山内由紀子, 来嶋秀治, 山下雅史, 関数ルータモデルの提案, 2013年電子情報通信学会総合大会, 岐阜大学, 2013年3月20日.

(2)白髪丈晴, 山内由紀子, 来嶋秀治, 山下雅史, 無理数の遷移確率をもつランダムウォークの脱乱択化, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2013年春季研究発表会, 東京大学, 2013年3月5日.

(3)Shuji Kijima, Deterministic random walk on finite graphs, Markov Chains on Graphs and Related Topics, RIMS, Kyoto, Feb. 13, 2013 (招待講演).

(4)白髪丈晴, 山内由紀子, 来嶋秀治, 山下雅史, 無理数遷移確率を許すランダムウォークの脱乱択化, 2012年度冬のLAシンポジウム, 京都大学数理解析研究所, 2013年1月29日

(5)白髪丈晴, 山内由紀子, 来嶋秀治, 山下

雅史, 無理数遷移確率ランダムウォークの脱乱択化, 第 142 回アルゴリズム研究会, 岩手大学, 2012 年 11 月 2 日.

(6) 来嶋秀治, 確率と計算, 日本 OR 学会九州支部 平成 24 年度 第 2 回講演会, 北九州市立大学, 2012 年 10 月 28 日 (招待講演).

(7) 白髪丈晴, 山内由紀子, 来嶋秀治, 山下雅史, ロータールーターモデルの設計手法の提案, 火の国シンポジウム 2012, 九州工業大学, 2012 年 3 月 16 日.

(8) 来嶋秀治, 古賀健太郎, 牧野和久, ランダムウォークの脱乱択化 — 確率と計算, 日本オペレーションズリサーチ学会「待ち行列」研究部会 第 228 回研究会, 京都大学, 2011 年 10 月 22 日 (招待講演).

(9) 来嶋秀治, 確率と計算, 最適化理論の産業・諸科学への応用, 九州大学, 2011 年 10 月 14 日 (招待講演).

(10) 白髪丈晴, 山内由紀子, 来嶋秀治, 山下雅史, ロータールーターモデルの周期性について, 平成 23 年度 (第 64 回) 電気関係学会九州支部連合大会, 佐賀大学, 2012 年 9 月 26 日.

(11) 来嶋秀治, 確率と計算, 日本応用数理学会 2011 年度年会, 同志社大学, 2011 年 9 月 14 日.

(12) 来嶋秀治, 古賀健太郎, 牧野和久, 有限グラフ上のランダムウォークの脱乱択化, 第 135 回アルゴリズム研究会, 秋田県立大学, 2011 年 5 月 16 日.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ

[http://tcslab.csce.kyushu-u.ac.jp/~kijima/index\\_j.html](http://tcslab.csce.kyushu-u.ac.jp/~kijima/index_j.html)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

来嶋 秀治 (KIJIMA SHUJI)

九州大学・システム情報科学研究院・准教授

研究者番号: 23650007

### (2) 研究分担者

牧野 和久 (MAKINO KAZUHISA)

京都大学・数理解析研究所・准教授  
研究者番号: 60294162

(3) 連携研究者 なし