科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）研究成果報告書

平成２５年 ５ 月 ９ 日現在

機関番号：３２６４１
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：２０１１～２０１２
課題番号：２３６５１１５７
研究課題名（和文） パーフェクトサンプリングを用いたマルコフ連鎖モンテカルロ法の構築

研究課題名（英文） Markov chain Monte Carlo method based on perfect sampler

研究代表者
松井 知己（TOMOMI MATSUI）
中央大学・理工学部・教授
研究者番号：３０２７０８８８

研究成果の概要（和文）：パーフェクトサンプリングを用いたマルコフ連鎖モンテカルロ法の構築
確率的 PERT ネットワークに対し，クリティカルパスの平均長を計算する，FPRAS の構築に成功した。この解法では，新たに開発した，CFTP 法に基くパーフェクトサンプリング法を用いている．開発したサンプリング法はサンプルを得るまでの推移回数が多項式時間であることが保障されている。これを実装して計算実験を行ったところ，推移回数は経験的には２～３回程度しか必要としない非常に高速な解法であることが分かった．

研究成果の概要（英文）：Markov chain Monte Carlo method based on perfect sampler

We proposed an FPRAS (Fully Polynomial time Randomized Approximation Scheme) for calculating the expectation of the critical path length in a stochastic PERT (Program Evaluation and Review Technique) network. Our scheme uses a perfect sampler for critical paths based on CFTP (Coupling From The Past) method. The expected number of required transitions of our perfect sampler is bounded by a polynomial of an input size of a given problem. We have implemented our algorithm (scheme) and found that the expected number of required transitions is less than or equal to 3 in almost of all cases, which indicates that our perfect sampler is sufficiently fast.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2011 年度	1,600,000	480,000	2,080,000
2012 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
総計	2,700,000	810,000	3,510,000

研究分野：複合新領域
科研費の分科・細目：社会システム工学・安全システム
キーワード：OR，最適化,マルコフ連鎖，MCMC 法

１．研究開始当初の背景

マルコフ連鎖モンテカルロ法（MCMC 法）は、待ち行列ネットワーク、ゲノム解析、金融等様々な分野において活用されており、既に古典的な方法と言ってよい。しかしながら、MCMC 法は乱数を用いた計算法であるため再現性が無い。この性質は、社会的に重要なシステムの解析では，得られた解の質の保証が無く，大きな問題点となる。
　これに対し近年、MCMC 法を用いた全多項式時間近似乱拓スキーム（FPRAS）に関する研究が、アルゴリズム分野において急速に

進んでいる。本研究で取り組むこの解法は、得られる解の近似精度を保証する計算法であり、古典的な MCMC 法で得られる解の精度が（通常）経験的にしか分からないことに比べ、実用上重要な性質を備えた解法となっている。MCMC 法を用いた FPRAS の設計は、世界的には多数の研究者が取り組んでいるが、日本でこれに取り組んでいる研究者は非常に少ない。申請者は 2004 年よりこの研究に取り組んでおり、日本におけるこの分野のパイオニア（の一人）であると自負している。

MCMC 法の構築において、マルコフ連鎖を用いたサンプリング法が必要となる。更に、精度保証を可能とする FPRAS を構築するには、サンプリング法の精度保証が必要不可欠である。本研究ではパーフェクトサンプリング法を構築することで、MCMC 法の精度保証を行う。1996 年に Propp と Wilson によって提案された CFTP(coupling from the past) 法は、マルコフ連鎖の極限分布に厳密に従うサンプリング（パーフェクトサンプリング）を可能とする驚くべき手法である。日本においては CFTP 法の認知度は非常に低く、その研究を継続的に行っている研究者は、現時点で申請者のグループ以外には存在しない。アルゴリズム分野の研究者である申請者は、2002 年より CFTP 法の研究に取り組んでいる。これまでの成果として、（医療統計等において重要な『正確検定』を行う際に必要となる）分割表を生成する CFTP 法や、ゲノム解析等の確率モデルで多用される(離散)ディリクレ分布に従うサンプリングを行う CFTP 法の構築に成功している。MCMC 法においてパーフェクトサンプリングを併用した解法は、世界的に見てもあまり成功例は無い。申請者はこれまでに、 Jackson 型ネットワークと呼ばれる単純な待ち行列ネットワークにおいてこれに成功している。

現時点における MCMC 法を用いた FPRAS の研究，および，CFTP を用いたサンプリング法の研究は、数学者によって進められていることが多い。そのため多くの論文における研究対象は、グラフの安定集合や、離散構造における特別な集合など、数学的な興味に基づくものが多い。これに対し本研究では、確率的 PERT という、実用性の高いモデルに対する MCMC 法を用いた FPRAS の開発と、CFTP 法に基づくパーフェクトサンプリング法の構築を行う。この点において、数学における理論的興味に基づくこれまでの研究とは一線を画すものである。本研究による結果は、大規模プロジェクトの管理を行うソフトウェア等において実際に用いることが可能である。このことから本研究は、『実務上重要な問題に対し、MCMC 法を用いた FPRAS の構築する』という新たな研究の流れを展開する契機になるものと考えている。

２．研究の目的

本研究では、マルコフ連鎖モンテカルロ法（MCMC 法）を用いた全多項式時間乱拓近似スキーム（FPRAS）の構築を行う。また MCMC 法において必要となるサンプリング法として、coupling from the past 法（CFTP 法）に基づくパーフェクトサンプリング法（所望の確率分布に厳密に従うサンプリング法）を構築する。

対象とする具体的なモデルとして、確率的 PERT ネットワークを予定している。プロジェクトの計画や管理における手法は，経営科学や生産工学，オペレーションズ・リサーチの分野で活発に研究されてきた．古典的なプロジェクト管理手法の 1 つとして，PERT (program evaluation and review technique) がある．PERT では，プロジェクトを有向非巡回ネットワークに置き換えて扱う．このネットワークを PERT ネットワークと呼ぶ.本研究で扱う PERT ネットワークは，作業 (activity) を辺に対応させる AoA (activity on arc) 方式である．作業の開始や完了を事象(event) と呼ぶ．PERT ネットワークの頂点は事象に対応する．PERT ネットワークの構造は作業間の半順序関係を表す．すなわち，ある頂点を始点とする辺に対応する作業は，その頂点を終点とする辺の作業がすべて完了するまで開始されないことを表す．作業の開始のみを表す事象に対応する頂点と，完了のみを表す事象に対応する頂点をそれぞれ PERT ネットワークの始点，終点と呼ぶ．以下では，PERT ネットワークの始点と終点はそれぞれ唯一であると仮定する．PERT ネットワークにおいて，辺の長さは対応する作業の所要時間を表す.本稿では，作業時間はすべて非負であると仮定する．プロジェクトの完了時刻は，PERT ネットワークの始点と終点を結ぶ最長路の長さで表される．この最長路をクリティカルパスと呼ぶ.作業時間が確定的な場合，クリティカルパスは容易に求まる 1. しかしながら，現実のプロジェクトにおける作業時間は不確実性を有する．これをモデル化するため，辺の長さを(非負) 確率変数で表した PERT ネットワークを確率的 PERT ネットワークと呼ぶ．厳密には，確率的 PERT ネットワークにおいて，辺長は既知の確率分布に従う確率変数である．確率的 PERT ネットワークの(始点と終点を結ぶ) あるパスがクリティカルパスであるか否かは確率的に定まる．よって，確率的 PERT ネットワークのクリティカルパス長は，辺長の確率分布とは異なる分布に従う確率変数である．

本研究では，確率的 PERT ネットワークに対し、クリティカルパスの平均長の計算する

FPRAS 法とパーフェクトパーフェクトサンプリング法の構築を行う。

３．研究の方法

MCMC 法を用いた FPRAS の構築には、問題の再帰構造を解析し、それを積極的に用いたアルゴリズムの設計が必要となる。更に、MCMC 法で用いるパーフェクトサンプリング法の開発には、対象とする組合せ構造に依存した単調マルコフ基底の設計が必要となる。本研究では、待ち行列ネットワークと確率的 PERT ネットワークという２つの具体的なモデルに対し、上記の設計を行い、それらを組み合わせることで全体の解法の構築をと行う。
特に初年度は、複数連鎖を持つ待ち行列ネットワークモデルを対象とし、2 年目には確率的 PERT ネットワークモデルについて研究を行う予定である。

４．研究成果

対称とする確率的 PERT ネットワークに対し，詳細な定義のために，整数定数 k を導入する．ただし $k \geq 2$ と仮定する．任意の変数 $x_i \in X$ について，k 個の非負整数定数 $\omega_i(1), \omega_i(2), ..., \omega_i(k)$ が与えられているとする．特に，$\omega_i(1), \omega_i(k)$ をそれぞれ変数 x_i の楽観値，非観値と呼ぶ．これらの値は $0 \leq \omega_i(1) \leq \omega_i(2) \leq \cdots \leq \omega_i(k)$ を満たすとする．本論文では次の仮定を置く．
仮定
(1) $\exists x_i \in X, \exists j' \in \{1, 2, ..., k\}$, $p_i(j') > 0$ かつ $w_i(j') > 0$ が成り立つ．
(2) 本論文で扱う確率的 0-1 整数計画問題において，各変数 $x_i \in X$ の目的関数係数の値 G_i は，

$$\Pr[G x_i = w_i(j)] = 1/k \quad (\forall j \in \{1, 2, ..., k\})$$

を満たす．
(3) 確率変数 G_i は互いに独立であるとする．
確率的 PERT ネットワークに対し，クリティカルパスの平均長を計算する，FPRAS の構築に成功した。本論文で提案する全多項式時間乱択近似スキーム (FPRAS: Fully Polynomialtime Randomized Approximation Scheme) は以下を満たすものである．パラメータ $0 < \forall \varepsilon < 1$ と $0 < \forall \delta < 1$ が与えられたとき，FPRAS は以下の(1)，(2) を満たすアルゴリズム $A(\varepsilon, \delta)$ を与える．
(1)アルゴリズム $A(\varepsilon, \delta)$ の出力 Y は，与えられた確率 PERT ネットワークのクリティカルパス長の平均値に $V(\Omega 0)$ に対し，

$$\Pr[(1-\varepsilon)V(\Omega 0) \leq Y \leq (1+\varepsilon)V(\Omega 0)] \geq 1-\delta$$

を満たす．
(2) アルゴリズム $A(\varepsilon, \delta)$ の期待実行時間は，与えられた確率 PERT ネットワークの枝数 m，枝長さの種類数 k，ε^{-1} および対数値 $\ln(\delta-1)$ の多項式で抑えられる．
具体的には，パラメータ $0 < \forall \varepsilon < 1$ と $0 < \forall \delta < 1$ に対し，サンプル数 $S = 48km2\varepsilon-2 \ln(2m/\delta)$ としたとき，我々の scheme が提示するアルゴリズム $A(\varepsilon, \delta)$ の出力 Y は，

$$\Pr[(1-\varepsilon)V(\Omega 0) \leq Y \leq (1+\varepsilon)V(\Omega 0)] \geq 1-\delta$$

を満たす．ここで，$V(\Omega 0)$ は与えられた確率的 PERT ネットワークの期待最適値を表す．この解法では，新たに開発した，CFTP 法に基くパーフェクトサンプリング法を用いている．開発したサンプリング法はサンプルを得るまでの推移回数が多項式時間であることが保障されている。具体的には，期待推移回数は，k 以下である，
上記より．提案手法の期待実行時間は $O(km\hat{}2S)$ である．ただし，S は各反復でのサンプリングサイズであり，$S = 48km^2\varepsilon^{-2} \ln(2m/\delta)$ である．

上記の perfect sampler を実装して計算実験を行ったところ，推移回数は経験的には２～３回程度しか必要としない非常に高速な解法であることが分かった．
クリティカルパスの平均長を計算する FPRAS は，問題サイズを再帰的に縮小する構造を取り入れることで求解時間の多項式性を確保している。また，問題を縮小するためのネットワーク枝の選択基準を導入し，さらなる高速化を図った。
上記の FPRAS を実装し，計算機実験を行った。問題サイズが大きな場合は，前列挙に比べ高速であることが人できた。しかしながら問題サイズが小さな場合は，全列挙の方が高速となることが確認された。そこで，再帰的に問題祭を縮小する際に，解法を全列挙に切り替えることで，より高速な解法の構築を行った。また，計算機実験によって，解法の切り替えのタイミングの導出を行った。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

Ryuhei Miyashiro, Tomomi Matsui, and Shinji Imahori, ``An Approximation Algorithm for the Traveling Tournament Problem,'' Annals of Operations Research, Volume 194 (2012), Number 1, pp. 317-324.（査読有）

Tomomi Matsui and Yuichiro Miyamoto, ``Characterizing Delaunay Graphs via Fixed Point Theorem,'' 24th Canadian Conference on Computational Geometry

(CCCG), August 8-10, 2012, Charlottetown, Prince Edward Island, Canada, pp. 249-254. (査読有)

〔学会発表〕(計 4 件)

松井知己, 穴太克則, ``Lower Bounds for Bruss' Odds Problem with Multiple Stoppings,'' 日本オペレーションズリサーチ学会 2012 年春季研究発表会, 防衛大学, 2012 年 3 月 27,28 日, pp. 30-31. (発表者:松井知己, 3 月 27 日)

松井知己, 穴太克則, ``Lower Bounds for Bruss' Odds Problem with Multiple Stoppings,'' 日本オペレーションズ・リサーチ学会「最適化の理論と応用」研究部会 (SOTA), 2012 年度第 1 回 研究会, 5/26(土), 東京大学 本郷キャンパス 工学部 6 号館 3 階 セミナー室 A・D. (発表者:松井知己, 5 月 26 日)

Katsunori Ano and Tomomi Matsui, ``Lower bounds for Bruss' Odds problem with multiple stoppings,'' Satellite Thematic Sessions ``Optimal stopping and applications,'' Organised by Krzysztof Szajowski, 6th European Congress of Mathematics July 2-7, 2012, Jagiellonian University, Krakow, Republic of Poland. (speaker: Katsunori Ano, July 3)

Tomomi Matsui and Yuichiro Miyamoto, ``Characterizing Delaunay Graphs via Fixed Point Theorem,'' 24th Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG), August 8-10, 2012, Charlottetown, Prince Edward Island, Canada, pp. 249-254. (speaker: Yuichiro Miyamoto, Aug. 10)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
○出願状況 (計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

○取得状況 (計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等

６. 研究組織
(1)研究代表者
松井 知己 (MATSUI TOMOMI)
中央大学・理工学部・教授
研究者番号:３０２７０８８８

(2)研究分担者
( )

研究者番号:

(3)連携研究者
( )

研究者番号: