

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 16 日現在

機関番号：10101

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2013

課題番号：23654001

研究課題名(和文) 超平面配置とアローの不可能性定理の展開

研究課題名(英文) Hyperplane Arrangements and Arrow's Impossibility Theorem

研究代表者

寺尾 宏明(Terao, Hiroaki)

北海道大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：90119058

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円、(間接経費) 810,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の主眼は、超平面配置の理論の社会科学研究への応用であった。しかし、異分野間の溝を越えるには大きなエネルギーを要する。その突破口として研究代表者の19年の論文(Ad. Math.)を主題とする国際セミナーを23・24年度に行った。特筆すべき成果は、数学と社会科学をまたぐ協働作業の場が形成されたことである。具体的には、S. Settepanella(Labo. of Econ. and Man., Scu. Sup. Sant'Anna, Pisa, 25年8月から北大・理)と研究代表者を中心に、社会選択論・Decision Theoryへの超平面配置の応用を一層推進する環境が形成された。

研究成果の概要(英文)：The main purpose of this research was to apply the theory of hyperplane arrangements to social sciences. We, however, need a tremendous amount of energy to jump over a gaping divide between two different research areas. To seek for breakthroughs, we organized international seminars in the AY 2011 and AY 2012. As a result of the endeavour, a place where mathematicians and social scientists work together was created.

Explicitly speaking, S. Settepanella(Labo. of Econ. and Man., Scu. Sup. Sant'Anna (Pisa, Italy) before she moved to Hokkaido University in August, 2013) and I are at the center of the activities enabling various applications of hyperplane arrangements to the social choice theory and the decision theory.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数的組み合わせ論 超平面配置 アローの不可能性定理

1. 研究開始当初の背景

超平面配置の歴史は有史以前に遡る。たとえば、数直線上の有限個の点は最も簡単な例である。無限直線上から m 個の点を取り除けば、それらの点によって直線は $(m+1)$ 個の"部分"に分割されるが、そのうち無限の長さを持つものは両端の2つの"部分"であり、残りの $(m-1)$ 個の"部分"は有限の長さを持つ"部分"である。有限の"部分"が m 個ではなく $(m-1)$ 個になることは「植木算の原理」として日本では昔からよく知られている。これは小学校レベルの算数であるが、超平面配置の理論のひとつの発端である。この「植木算の原理」は1975年に米国数学会メモワールとして出版された T. Zaslavsky 著 "Facing up to arrangements: Face-count formulas for partitions of space by hyperplanes." *Memoirs Amer. Math. Soc.* **154**, 1975 において、現代枠組の中で高次元に拡張された。その際に主役を演じたのは現代組合せ論の主たる道具のひとつであるメビウス関数であった。後に、この Zaslavsky の公式は位相幾何学、リー環論、代数幾何学、群論などの多くの分野の視点からの解釈をもつようになった。

この成功例からの類推で、人文社会学からの視点から超平面配置を見ると興味ある解釈が得られることが期待されていた。そのひとつの予兆として得られていたのが、研究代表者による論文 "Chambers of arrangements of hyperplanes and Arrow's impossibility theorem" (*Ad. Math.* 2007) であった。それによるとアローの不可能性の定理は、組み紐配置の部屋に関する純数学的結果として解釈できる。しかも、その意味で、アローの不可能性定理をすべての超平面配置に拡張できることもわかる。ここを突破口として社会科学者と数学者の新たな協働作業の場を作ることが期待されたのは当然といえよう。しかるに、論文発表(2007)後、本研究開始(2011)までの間、この論文が社会科学者、あるいは、社会科学を研究する数学者の間に広く読まれることは起こらなかった。純粋な数学論文として書かれているので、読むのが困難だったのではないかと、推察されていた。以上が、研究開始当初の状況であった。

2. 研究の目的

研究の目的は以下の3点に要約できる。

- (1) アローの不可能性定理の(応用上意味のある)拡張など、超平面配置の数学の社会科学(社会選択論など)

への応用

- (2) 応用を追求するプロセスにおいて、フィードバックとして得られる超平面配置の数学の新定理の証明
 (3) 社会科学者と数学者の新たな協働の場の確立とそれに伴う人材の国際的スケールでの移動の促進によるグローバルな研究体制の創出

3. 研究の方法

「1. 研究開始当初の背景」に述べたように、まずは、研究代表者の2007年の論文を広く宣傳伝えることから始めた。初年度の23年度の11月20~25日に北大で「超平面配置とアローの不可能性定理の展開」と名付けたワークショップを開催した。主たる参加者は、Simona Settepanella(Labo. Economics and Management, Scuola Superiore Sant'Anna, Pisa, Italy), Ruimei Gao(東北師範大学, 長春, 中国), 阿部拓郎(京大・工)であった。ワークショップのテーマは超平面配置の理論の社会科学への応用であり、Settepanella, Gao, 寺尾の連続講演が行われた。Settepanella は彼女の先駆的研究を更に推し進め、行動学的な方面に応用を挙げ、Gao は D 型の Shi 配置の simple-root basis についての新しい知見を報告し、寺尾は「1. 研究開始当初の背景」で挙げた論文 "Chambers of arrangements of hyperplanes and Arrow's impossibility theorem" (*Ad. Math.*, 2007) について解説した。阿部を中心とした活発な議論を通じて今後の研究の方向が指し示された。また、ワークショップ後、Settepanella, Gao, 寺尾の3名は竹村彰通(東大・情報理工)を訪問し、超平面配置の理論の経済学・統計学・確率論への応用について有益な議論を行った。その際、ポワソン分布と超平面配置の関連についての竹村の指摘は、今後の研究動向の流れを加速すると思われ、来年度以降の研究の進展に期待を抱かせた。

2年目の24年度には、11月9~10日に東大・情報理工で行われたワークショップ「超平面配置と統計学」と、それに引き続き、11月12~13日に北海道大学大学院理学研究院で開催された勉強会「超平面配置と社会選択」において、情報交換と共同研究が進展した。東京大学大学院情報理工学系研究科でのワークショップには、Simona Settepanella(LEM: Laboratory of Economics and Management Scuola Superiore Sant'Anna, Pisa, Italy), Gennaro Amendola(Telematica

大学, Italy)がイタリアから参加, 日本からは竹村彰通, 阿部拓郎が参加した. 北大・理の勉強会にはイタリアからの2名に加え, 寺尾宏明, 吉永正彦, 陶山大輔(いずれも北大・理)が参加し, 活発な議論が行われた. イタリアの2人の研究成果は decidability(決定可能性)と manipulability(操縦可能性)とのトレードオフ関係を超平面配置の概念を用いて記述するという興味深いものであり, すでに論文が出版されている. この結果は数学と社会選択との融合領域における major な成果のひとつであるといえよう. 上記ふたつの研究集会で情報を共有, かつ, 数学的論点と課題が明らかになったことで次年度以降への進展が期待された.

最終年度の25年度は, 7月初旬に米国から June Huh(ミシガン大, USA)を北大に迎え, 研究課題に関して研究打合せを目的にしたセミナーを行った. Huh はまだ20代ながら, 米国の rising superstars のひとりであって複数の著名な予想を鮮やかに解決し, 将来を囑望されている. セミナーでは超平面配置の代数幾何に関する深い結果が報告され, 本研究課題の方向性に, 大きな影響が与えられた. また, 本研究の海外共同研究者の Simona Settepanella が25年度の8月から北大で特任講師に採用された. このことは23年度と24年度における本研究の活発な活動によって初めて可能になったことであり, 本研究費のおかげである. 結果として, Settepanella とさらに緊密な共同研究が可能になったため, 今後の社会科学(特に経済)との連携が拡大するための基盤が築かれた. その成果は, 25年11月に北大で行われた阿部拓郎を招いての Settepanella と寺尾との研究打合せで発揮された. Settepanella の主導で社会科学(特に, 社会選択論)と超平面配置との関連について session が行われた. この成果はまだ論文としてまとめられていないが, 論文の「核」は得られている. この基盤の上に, 26年度には Settepanella を主たるオーガナイザーとして国内外の経済学者と数学者の共同 Workshop を計画しており, 豊かな成果が期待される.

4. 研究成果

上述「2. 研究の目的」の(1)と(2)と(3)に応じて, 重要な研究成果を短く解説しよう.

(1) アローの不可能性定理の拡張など, 超平面配置の数学の社会科学への応用

[雑誌論文] においては, 経済統計学に登場する超平面配置をコクセター群作用の観点から見ることにより部屋の数などについての新公式を与えた.

本研究に最初から最後まで関わっていた G. Amendola - S.

Settepanella による論文

"Optimality in Social Choice"

(J. Math. Sociol. **36** (2012),

1980-1989)においては, 23年度に

おける北大でのワークショップ

とそれに先立つ電子メールによる

彼らとの discussion の成果が

反映されている. 超平面配置を巧

みに用いることにより,

decidability(決定可能性)と

manupulability(操縦可能性)と

のトレードオフ関係を記述した.

(2) 応用を追求するプロセスにおいて, フィードバックとして得られる超平面配置の数学の新定理の証明

[雑誌論文] においては, A.

Shapiro - R. Steinberg - B.

Kostant - I.G. Macdonald による

著名な結果を任意のイデアル配

置に拡張することに成功した. こ

れは, E. Sommers and J. Tymoczko,

"Exponents for B-stable ideals"

(Trans. Amer. Math. Soc.,

358(2006), no. 8, 3493-3509)の

中の「第2予想」の肯定的解決で

もある.

[雑誌論文] においては, A 型の

Shi 配置の微分加群の基底を初め

て具体的に構成し, そこに,

Bernoulli 多項式が本質的に現れ

ることを示した.

[雑誌論文] の論文では A 型の

Shi 配置を扱ったのに対し, [雑誌

論文] においては, D 型の Shi

配置について類似の結果を得た.

[雑誌論文] においては, コクセ

ター配置とその上の群同変な重

複度関係に関して, その微分加群

が自由になることを示した.

[雑誌論文] においては, Shi 配

置と Catalan 配置を併せて得られ

る Shi-Catalan 配置についてその

微分加群が自由になることを示

した.

(3) 社会科学者と数学者の新たな協働の場の確立とそれに伴う人材の国際的スケールでの移動の促進によるグローバルな研究体制の創出
Settepanella がイタリアの職

(Pisa)を辞して北大へ赴任したことにより,超平面配置の社会科学への応用研究の中心になるグループが国内に形成されたことの意味は大きい.実際,26年夏には国内の経済学者の西部忠(北大・経)等と共同で組織する国際研究集会が北大で開催される予定である.海外からG. Dosi(Pisa)・D. Saari(UC Irvine)・E. Feichtner(Bremen)などの大家が講演予定である.また国内からも有賀祐二(中大)・紙屋英彦(名大)などの経済学者が講演する.このような活動を通して,本研究の更なる発展が望める.多様で活発な研究活動を支える確かな基盤を作ったことは本研究の最大の成果と言えると思う.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計8件)

Takuro Abe, Mohamed Barakat, Michael Cuntz, Torsten Hoge, Hiroaki Terao, The freeness of ideal subarrangements of Weyl arrangements, J. Eur. Math. Soc., 査読有, 印刷中,

<http://arxiv.org/abs/1304.8033>

Takuro Abe, Mohamed Barakat, Michael Cuntz, Torsten Hoge, Hiroaki Terao, The freeness of ideal subarrangements of Weyl arrangements. DMTCs Proceedings of FPSAC 2014 (26th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics), 査読有, 2014, 印刷中, <http://arxiv.org/abs/1304.8033>

寺尾 宏明, Weyl 配置のイデアル部分配置の自由性. 京都大学数理解析研究所講究録, 査読無, **1870**, 2013, 115-126,

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1870-11.pdf>

Hidehiko Kamiya, Akimichi Takemura, Hiroaki Terao, Arrangements stable under the Coxeter groups. in:

“Configuration Spaces: Geometry, Combinatorics and Topology,”

Proceedings of a special period at the De Giorgi Center, Scuola Normale in Pisa, May - June, 2010, (ed. A. Bjorner, F. Cohen, C. De Concini, C. Procesi, M. Salvetti), Edizioni Della Normale, Pisa, 査読有, 2012, 327-354,

<http://arxiv.org/abs/1103.5179>

Daisuke Suyama, Hiroaki Terao, The Shi arrangements and the Bernoulli polynomials. Bull. London Math. Soc. **44**, 査読有, 2012, 563-570, doi: 10.1112/blms/bdr118

Takuro Abe, Hiroaki Terao, Atsushi Wakamiko, Equivariant multiplicities of Coxeter arrangements and invariant bases. Advances in Math. **230**, 査読有, 2012, 2364-2377,

doi:10.1016/j.aim.2012.04.015

Ruimei Gao, Donghe Pei, Hiroaki Terao, The Shi arrangement of the type D_{ℓ} . Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., **88**, 査読有, 2012, 41-45,

doi:10.3792/pjaa.88.41

Takuro Abe, Hiroaki Terao, The freeness of Shi-Catalan arrangements. European J. Combin. **32**, 査読有, 2011, 1191-1198, doi:10.1016/j.ejc.2011.06.005

[学会発表](計16件)

Hiroaki Terao, The freeness of ideal-Shi arrangements and free paths in affine Weyl arrangements (and a question). an invited talk at Workshop on "New perspectives in hyperplane and reflection arrangements," 2014年2月10日, Ruhr-Universität Bochum, Germany

Hiroaki Terao, Finite Reflection Groups, Free Arrangements, Ideal Subarrangements of Weyl arrangements. an invited lecture at CIMPA-UNESCO-MESR-MINECO-VIETNAM research school on "Geometry and Topology of Singular Varieties. Theory and Applications," 2013年12月2, 3, 5, 6日, the Institute of Mathematics, Vietnam Academy of Science and Technology, Hanoi, Vietnam

Hiroaki Terao, On ideal subarrangements of Weyl arrangements. an invited talk at Conference on "Japanese Turkish Joint Geometry Meeting," 2013年11月22日, Galatasaray University, Istanbul, Turkey

Hiroaki Terao, On ideal subarrangements of Weyl arrangements. an invited talk at Conference on "Hyperplane arrangements and characteristic classes," 2013年11月12日, RIMS, Kyoto University, Kyoto

Hiroaki Terao, Multiple addition/deletion theorems and the existence of free paths in the affine Weyl arrangements. Combinatorics

Seminar, 2013年7月11日, Nagoya University, Nagoya

Hiroaki Terao, The freeness of ideal subarrangements of Weyl arrangements. an invited talk at Conference on "The 6th Pacific RIM Conference on Mathematics 2013," 2013年7月2日, Sapporo Convention Center, Sapporo

Hiroaki Terao, Logarithmic derivation modules of Shi arrangements associated with root systems. an invited talk at Conference on "Hyperplane Arrangements: Combinatorial and Geometric Aspects," 2013年2月21日, Ruhr-Universitat Bochum, Germany

Hiroaki Terao, Logarithmic derivation modules of Shi arrangements associated with root systems. an invited talk at Workshop on "Free Divisors and Differential Equations," 2012年11月8日, Tokyo University of Agriculture and Technology, Tokyo

Hiroaki Terao, Logarithmic derivation modules of Shi arrangements associated with root systems. an invited talk at "Combinatorial Representation Theory and Related Topics," 2012年10月11日, RIMS, Kyoto University, Kyoto

Hiroaki Terao, Primitive derivations, Shi arrangements and Bernoulli polynomials. a colloquium talk, 2012年9月28日, Northeastern Normal University, Chanchun, PRC

Hiroaki Terao, Primitive derivations, Shi arrangements and Bernoulli polynomials. an invited talk at the "2012 Shanghai Conference on Algebraic Combinatorics," 2012年8月20日, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, PRC

Hiroaki Terao, Primitive derivations, Shi arrangements, Bernoulli polynomials and the height-free conjecture. an invited one-hour talk at the "FPSAC '12 (The 24th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics)," 2012年8月2日, Nagoya University, Nagoya

Hiroaki Terao, Height basis of Weyl arrangements. an invited talk at the "Arrangements in Pyrenees" School on hyperplane arrangements and related topics, 2012年6月11日, Universite de Pau, France

Hiroaki Terao, Primitive derivations, Shi arrangements and Bernoulli

polynomials. an invited talk at the Special Session on "Singularities, Stratifications and their Applications" at an AMS Sectional Meeting, 2012年3月3日, University of Hawaii Manoa, Honolulu, HI, USA (with D. Suyama)

Hiroaki Terao, Simple bases for the logarithmic derivation modules of the generalized Shi arrangements, an invited talk at "Topics in the Theory of Weyl Groups and Root Systems (Sekiguchi 60)," 2011年9月20日, University of Tokyo, Tokyo

Hiroaki Terao, The Shi arrangements and the Bernoulli numbers, an invited talk at the Special Session on "The Algebraic Geometry and Topology of Hyperplane Arrangements" at an AMS Sectional Meeting, 2011年4月9日, College of the Holy Cross, Worcester, MA, USA

〔その他〕

ホームページ

<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~terao/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

寺尾 宏明 (TERAO, Hiroaki)

北海道大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号： 90119058

(2) 研究協力者

SETTEPANELLA, Simona

北海道大学・大学院理学研究院・特任講師

研究者番号： 40721890