

機関番号：24402

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2013

課題番号：23654007

研究課題名(和文) 表現論に関連する多項式の量子可積分系からのアプローチ

研究課題名(英文) Approach to the polynomials related to representation theory from quantum integrable systems

研究代表者

尾角 正人 (OKADO, Masato)

大阪市立大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：70221843

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円、(間接経費) 780,000円

研究成果の概要(和文)：量子可積分系から生まれたKRクリスタルのテンソル積の最高ウェイト元による母関数と隣接位相の母関数が等しいことを予想するX=M予想をD型の場合に解決することを目指した研究は8割程度まで進展した。例外型E6の場合の研究にも着手した。一方で、LLT多項式との関連についてはデータ収集にとどまった。

新しく四面体方程式と量子群の関連についての研究にも取り組んだ。3次元反射方程式の解の明示式、量子座標環のintertwinerの行列要素と量子展開環のPBW基底との関係、2次元簡約とアフィン量子群のq-振動子表現のテンソル積のintertwinerとの一致、等の研究を行った。

研究成果の概要(英文)：The study of X=M conjecture, which originates in quantum integrable systems, equating the generating functions of highest weight elements of the tensor product of KR crystals and rigged configurations has advanced about 80% to the goal for type D. Research for the exceptional case E6 was also begun. However, the study of the relation to LLT polynomial remained to be incomplete.

We also studied the relation between tetrahedron equation and quantum groups, namely, explicit formula for the solution to the 3D reflection equation, relation between matrix elements of the intertwiner of the quantum coordinate ring and PBW bases of the quantum enveloping algebra, coincidence of the 2D reduction and the intertwiner of the tensor product of q-oscillator representations of a quantum affine algebra.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：量子群

1. 研究開始当初の背景

リー環の表現論や代数的組合せ論において有名な多項式にコストカ多項式といわれるものがある。これは有限次元リー環 $gl(n)$ の既約表現におけるウェイト重複度の q アナログであり、基本表現(対称テンソル表現でもよい)のテンソル積を既約表現に分解したときの既約成分の重複度の q アナログにもなっている。このコストカ多項式に関して1990年代後半に、量子可積分系を起源とする2つの興味深い結果が得られた。一つはKirillov-Reshetikhinによるもので、ハイゼンベルグスピン鎖のエネルギー作用素をベーター仮説によって対角化する際に現れる臙装配位とよばれる組合せ論的対象を用いてコストカ多項式の全く新しい表示を見つけたこと。もう一つは中屋敷・山田によるもので、A型アフィン量子群の有限次元表現の結晶基底、および、それから定まるエネルギー関数を用いて、コストカ多項式の別の表示を導いた。これらの結果を結びつけるとA型アフィンリー環の最高ウェイト表現の、A型単純リー環の既約表現による分岐関数の新しい表示が得られる。中屋敷・山田による表示を X 、Kirillov-Reshetikhinによる表示を M と表すと、この $X = M$ という等式は研究代表者らによってすべてのアフィン量子群のKRクリスタル(よい性質をもつKirillov-Reshetikhin加群とよばれる有限次元表現の結晶基底)に対応して拡張されており、 $X = M$ 予想とよばれている。

一方で、A型の場合に限っても $X = M$ では捉えられないLascoux-Leclerc-Thibon多項式(LLT多項式)も存在する。これは $gl(n)$ の一般の既約表現のテンソル積における既約表現の重複度の q アナログである。この多項式については量子可積分系からのアプローチによる表示式は知られていなかった。

2. 研究の目的

この研究課題の目的は、量子可積分系研究から得られる知見を利用して、表現論に関連する多項式について詳しく調べることである。特に、(1)D型の場合の $X = M$ 予想の全単射を構成することによる証明(等式自体にはすでに直井による別手法を使った証明がある)(2)まだほとんど理解が進んでいない例外型の場合に対する研究への取っ掛けをつける。さらに、(3) $X = M$ 予想で扱っている有限次元表現(Kirillov-Reshetikhin加群)に属さないより広い場合に、テンソル積表現における既約表現の重複度の q アナログを定義し、A型のLLT多項式と比較すること、を目的とした。

3. 研究の方法

目的欄の各項目に対し、以下のような具体的方法で研究を遂行する計画を立てた。

(1) D型 $X = M$ 予想

1 X はKRクリスタルのテンソル積によって、まずこのテンソル積の成分が一つだけの場合を解決する。

2 一般のテンソル積の場合を解決する。

(2) 例外型 $X = M$ 予想

例外型の場合については、比較的簡単な場合を除きまだKRクリスタルの存在自体も予想の段階だが、最も簡単な場合で実験的研究に着手する。

(3) LLT多項式の別表示

1 量子可積分系からのデータの収集

アフィン量子群の有限次元表現の2つのテンソル積に対して量子R行列が定まる。この行列の $q \rightarrow 0$ の極限が得られれば X にあたる量の表示が得られるので、この計算データを収集する。

2 結晶基底の概念の拡張

$X=M$ 予想の範疇では、対応する有限次元表現の結晶基底の存在がわかっているが、LLT多項式ではより一般の有限次元表現が現れ、必ずしも結晶基底が存在しない。結晶基底の概念の拡張を図り、組合せ論的な操作により1の計算データの再現を試みる。

4. 研究成果

(1) D型 $X = M$ 予想

1 KRクリスタルのテンソル積成分が一つだけの場合は基本的だが、KRクリスタルの列分裂操作がどのようなものであるかを把握する上で重要でもある。この問題に坂本・シリングと取り組み解決した。(雑誌論文⁵)

2 KRクリスタルのテンソル積の個数が一般の場合については、最高ウェイト元から臙装配位への全単射写像の適切性の問題が困難で、研究機関内には終えることができなかった。しかし、現在この問題は解決しており、坂本・シリングとともに平成26年度中には論文を執筆する予定である。

3 当初の研究計画にはなかったが、すべての非例外型KRクリスタルが単純であることと相似性をもっていることを証明した。この研究は、今後すべての非例外型に対応する場合の $X=M$ 予想の解決に寄与するであろうと考えている。(雑誌論文³)

(2) 例外型 $X = M$ 予想

卒業論文指導中の佐野とともに $E_6^{(1)}$ 型アフィンリー環に付随する最も簡単なKRクリスタルの場合に予想を証明した。全単射は対応するKRクリスタルのクリスタルグラフのデータのみから定義され、他の型にも適用可能な一般性をもっている。(雑誌論文⁶)

(3) LLT多項式の別表示

1 A型アフィン量子群の有限次元表現はヤング図によってパラメトライズされるが、こ

のヤング図が2行の場合に量子R行列の $q \rightarrow 0$ の極限を計算した。この計算データをもとにLLT多項式と比較して、確かに一致していることを見た。

2 結晶基底の概念をKRクリスタルが存在しない有限次元表現の場合に拡張する試みは、当初想定していたようにはうまくいかなかった。しかし重要な問題であることに変わりはないので、今後も研究を続けていく決意である。

(4) 当初の計画にはなかったが、本研究課題とも関連する四面体方程式についての研究を連携研究者の国場とともに開始した。

1 四面体方程式については、 SL_3 に付随する量子座標環との関連が過去に指摘されていたが、これと同様の手法を C_3 型量子座標環に適用して、3次元反射方程式の明示解を求めた。3次元反射方程式はIsaev-Kulishが3次元で反射壁がある場合に粒子の散乱が因子化する条件として導出したものであるが、非自明解は当時見つかっておらず、我々の解が最初の解となった。(雑誌論文⁴)

2 国場とともに山田も共同研究に加わり、有限次元単純リー環に付随する量子座標環のフォック表現間のIntertwinerを自然な座標で展開した行列要素が、対応する量子展開環のべき零部分代数の相異なるPoincare-Birkhoff-Witt基底間の基底変換行列に一致することを示した。(雑誌論文²)

3 四面体方程式は3次元の可積分条件であるが、四面体方程式の解に適当な簡約を行うと2次元可積分条件であるヤン・バクスター方程式の解を導くことができる。この解が、実際に適当な量子群の表現のintertwinerとして捉えられるかどうかは明らかではなかった。この問題について、国場とともに表現が q -振動子表現であることを明らかにし、テンソル積表現の既約分解やR行列の既約成分における固有値を計算した。(雑誌論文¹)

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計11件)

1 A. Kuniba and M. Okado, Tetrahedron equation and quantum R matrices for infinite dimensional modules of $U_q(A_{1^1})$ and $U_q(A_{2^1})$, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **46** (2013) 485203(12pp) [査読有].

DOI: 10.1088/1751-8113/46/48/485203

2 A. Kuniba, M. Okado and Y. Yamada, A common structure in PBW bases of the

nilpotent subalgebra of $U_q(\mathfrak{g})$ and quantized algebra of functions, SIGMA **9** (2013), 049(23 pages) [査読有].

DOI: 10.3842/SIGMA.2013.049

3 M. Okado, Simplicity and similarity of Kirillov-Reshetikhin crystals, Contemp. Math. **602** (2013), 183-194 [査読有].

DOI: 10.1090/conm/602/12022

4 A. Kuniba and M. Okado, Tetrahedron and 3D reflection equations from quantized algebra of functions, J. Phys. A: Math. Theor. **45** (2012) 465206 (27pp) [査読有].

5 M. Okado, R. Sakamoto and A. Schilling, Affine crystal structure on rigged configurations of type $D_n^{(1)}$, J. of Alg. Comb. **37** (2013), 571-599 [査読有].

DOI: 10.1007/s10801-012-0383-z

6 M. Okado and N. Sano, KKR type bijection for the exceptional affine algebra $E_6^{(1)}$, Contemp. Math. **565** (2012), 227-242 [査読有].

7 M. Okado and R. Sakamoto, Stable rigged configurations for quantum affine algebras of nonexceptional types, Adv. in Math. **228** (2011), 1262-1293 [査読有].

8 C. Lecouvey, M. Okado and M. Shimozono, Affine crystals, one-dimensional sums and parabolic Lusztig q -analogues, Mathematische Zeitschrift **271** (2012), 819-865 [査読有].

DOI: 10.1007/s00209-011-0892-9

[学会発表](計12件)

1 M. Okado, Tetrahedron equation and quantum groups, Shanghai Workshop on Representation Theory, December 6 2013, East China Normal University and Tongji University, Shanghai, China

2 尾角正人, PBW bases and quantized algebra of functions, RIMS 研究集会「超弦理論、表現論、可積分系の数理」、2013年7月31日、京都大学

3 M. Okado, Kirillov-Reshetikhin tableaux, The XXIX International Colloquium on Group-Theoretical Methods in Physics, August 24 2012, Chern Institute of Mathematics, Tianjin, China

4 尾角正人, アフィン量子群の有限次元表現について、第57回代数数学シンポジウム、2012年8月20日、京都大学

5 M. Okado, Open problems related to Kirillov-Reshetikhin crystals, BIRS Workshop "Twenty-five years of representation theory of quantum groups", August 9 2011, Banff International Research, Canada

[図書](計0件)

〔産業財産権〕

出願状況（計0件）

取得状況（計0件）

〔その他〕

なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

尾角 正人 (OKADO, Masato)

大阪市立大学・理学研究科・教授

研究者番号：70221843

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

国場 敦夫 (KUNIBA, Atsuo)

東京大学・総合文化研究科・教授

研究者番号：70211886

山田 泰彦 (YAMADA, Yasuhiko)

神戸大学・理学研究科・教授

研究者番号：00202383

坂本 玲峰 (SAKAMOTO, Reiho)

東京理科大学・理学部・助教

研究者番号：30528055

(4) 研究協力者

Anne SCHILLING

カリフォルニア大学デーヴィス校・数学科・教授