

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 4 日現在

機関番号：14401

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2013

課題番号：23654008

研究課題名(和文) 2次元正規特異点に対する基本不等式の確立

研究課題名(英文) Toward the fundamental inequality for normal surface singularities

研究代表者

今野 一宏 (Konno, Kazuhiro)

大阪大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：10186869

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,700,000円、(間接経費) 510,000円

研究成果の概要(和文)：2次元正規特異点に対して、その極小解消空間における標準サイクルの自己交点数と幾何種数の間に成り立つ不等式を研究した。代数曲線束に対するスロープ不等式を念頭に置けば、期待される不等式における幾何種数の係数は、基本種数の関数として表示されなければならない。研究期間においては、2重点や巡回的3重点に対して標準特異点解消を用いてほぼ満足すべき形でスロープ不等式を示すことができた。これらは特殊な特異点に対する成果ではあるが、対応するターフィー予想の再証明を導くなどの応用を持つ。

研究成果の概要(英文)：We considered normal surface singularities in order to obtain an inequality between the self-intersection number of the canonical cycle and the geometric genus. Our inequality is modeled on the slope inequality for fibred algebraic surfaces, and thus the ratio should be expressed as a function in the fundamental genus. We could establish the desired inequalities for double and triple points of cyclic type, by using the canonical resolution. They lead us to another proof for Durfee's conjecture in such special cases.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：特異点 標準サイクル 種数

1. 研究開始当初の背景

(1) 2次元特異点論は、1960年代の M. Artin による有理特異点研究に始まり、その研究は(大域的な)代数曲面論、特にその分類理論を範として展開されてきた。幾何種数の対応物として、1970年代に Wagreich は特異点にも3種類の種数を導入した。すなわち、基本サイクルの算術種数である

基本種数,

特異点を解消して生じる例外集合にサポートをもつサイクル(非零な有効因子)の算術種数の最大値としての

算術種数,

解消空間の構造層の第1高次順像の次元として定まる

幾何種数

である。や は交点数から決まる位相的な量である。一方 は解析的な不変量である。その後、小平次元の対応物を定めるため、Knöller や渡辺公夫によって多重種数も導入され、2次元正規特異点の分類理論が展開された。これら数々の種数は、有理2重点をはじめとする有理特異点の特徴付けや楕円型特異点の研究に大いに活用されてきたが、大域的な代数曲面論と同様に「一般型」特異点に関する組織的な研究は十分になされていないと言いつてもいい状況である。2次元特異点論のなお一層の進展のためには、代数曲面論をいま一度俯瞰し、有効な方法論の移植を検討する必要がある。

(2) 一般型代数曲面論に目を転じれば、下限を与える

Noether 不等式,

上限を与える

宮岡・Yau 不等式

などの、数値的不変量に対する数種類の基本不等式があり、一般型曲面の構造研究はこれら不等式で区切られる平面領域をひとつの拠り所として展開されてきている。それが1980年代に Persson が提唱した「曲面の地誌学」である。対象全体を見渡すことができるこのような「地図」の存在は、当該分野の研究者に共通の研究基盤を与えるため、個別に行われている研究の位置付けを明瞭にし、研究領域全体の進展状況を概観する際に大いに役立っている。従って、2次元一般型特異点に対しても Noether 型や宮岡型の、不変量間の基本的な不等式を示して、地誌学的な研究視点を導入する必要がある。

(3) このような観点から特異点論を眺めると、いくつかの先行結果が見つかる。その代表的なものは小山の不等式である。これは標準サイクルの自己交点数と算術種数との間に成立する不等式だから、幾何種数を取り込んでいないという点でわれわれが目標とする不等式とは若干タイプが異なるが、大変示唆的である。例えば、幾何種数と算術種数の関係が明らかになれば、直ちに非自明な不等式を得ることができる。また、2重点に対するダーフィー予想を解決する際に、泊によって示された不等式も示唆的である。これはミルナー数と幾何種数の間の不等式だが、ラウファアの公式を経由すれば、われわれが目指す不等式に極めて近い形になる。但し、そのためには、例外集合のオイラー数を適切に処理しなければならない。

2. 研究の目的

(1) 2次元正規特異点の極小解消空間には、例外集合およびその部分集合にサポートをもつ様々なサイクルが存在する。それらの中でも、基本サイクルや標準サイクルは特異点の幾何学構造・代数構造を理解する上で取り分けて重要である。

本研究では標準サイクルに対する鎖連結成分への分解を利用することによって、特異点の種数(幾何種数,算術種数,基本種数)と、重複度や標準サイクルの自己交点数といった不変量相互の関係を明示するネーター型の基本不等式を得ることが主な目的である。こういった不等式は大域的な代数曲面論の研究に逆輸入され、応用に耐えうる形で定式化されることが望ましい。

(2) 標準サイクルの重要性はとくに超曲面特異点を含むクラスであるゴースト・スタイン特異点において著しい。2次元正規特異点の標準サイクルの自己交点数と幾何種数との間の不等式が確立されれば、特異点の研究に地誌学的な観点を導入でき、これまでになされてきた種々の研究を総括的に概観することが可能になる。ネーター型不等式は、基本種数が2以上の特異点という広大なクラスに対して、特に有効な研究手段を提供することが期待される。

3. 研究の方法

(1) まず、研究組織について述べる。研究の基本形態は、研究代表者による単独研究であるが、必要に応じて、日本各地の研究者に協力・助言を仰いで研究計画の遂行をはかった。とくに、都丸正(群馬大)、奥間智弘(山形大)、泊昌孝(日大)などの2次元特異点論を専門とする国内の研究協力者と緊密に連絡をとって、議論できる環境を構築することは不可欠である。

(2) 次に具体的な研究方法について述べる。目標とする不等式のプロトタイプとして小山の不等式を再考する。とくに、どのような特異点が不等式において等号を達成するのかを研究する。その際に算術種数と幾何種数の関係を出来る限り明らかにしつつ研究を進める。一般に、幾何種数は算術種数より大きい。またプリスコーン型の超曲面特異点を始めとするゴーレンスタイン特異点に対しては、計算機を援用するなどして具体例を多数計算し、期待される不等式の具体的な形を予想し、それを証明するという順で考察を進める。また、2重点や3重点については標準特異点解消などの強力な手段を用いた帰納法を援用することによって、基本種数を考慮した形の不等式の形を模索する。研究の進捗状況に応じて適宜、予想に修正を加え標準サイクルの鎖連結成分分解を用いて最終的な証明を与える。

(3) 副産物を含めて、得られた研究成果は国内外で開催される研究集会やセミナーで発表するとともに、学術論文等にまとめて公表する。研究を遂行するために、既存の、或いは研究費で購入する学術図書によって関連諸分野の知識を十分に蓄える。また、国内外旅費を有効に活用して、各地の研究協力者と直接会って議論を交わす。また、関連する国内外の研究集会に参加して、積極的に資料収集にあたる。

4. 研究成果

(1) まず、3変数のプリスコーン型多項式で定義される2次元超曲面特異点をはじめとする具体的な特異点に対して、標準サイクルやヤオ・サイクル、極大イデアルサイクルといった例外集合にサポートをもつ種々のサイクルを考察し、その鎖連結成分への分解を観察することによって特異点の諸性質を解析し、基本種数を固定した際の不等式の形を探った。

また、標準サイクルの自己交点数と算術種数の間に成立する基本的な不等式である小山の不等式において、その下限をとり基本種数が2の特異点に対して、標準サイクルの鎖連結成分への分解を用いて、幾何種数の上限を評価した。また、その埋込み次元や重複度がある程度満足できる形で記述することにも成功した。ここでは、基本種数2の場合の特殊性、すなわちヤオ・サイクルの長さが特異点の算術種数を与えている点が重要であった。この事実も鎖連結成分分解を用いて証明される。

(2) さらに、2重点および巡回型2次元正規3重点に対するネーター型不等式を示した。この種の特異点には、「標準特異点解消」という強力な研究手段を活用することがで

きる。すなわち各ブローアップのステップ毎に不変量の変化を分岐因子である平面曲線の特異点の重複度を用いて記述し、帰納的な議論にのせることが可能である。超楕円曲線束やトリゴナル曲線束に対するスロープ不等式から、成立すべき不等式の形を類推した後、標準サイクルの自己交点数と幾何種数の間に成立する不等式を、基本種数を考慮に入れた形で証明することができた。これは2重点および巡回型3重点に対するスロープ不等式と呼ばれるべき不等式であり、この場合のダーフィー予想の再証明を導く。実際、基本種数が2以上の場合には、われわれの2重点に対するスロープ不等式は泊昌孝氏が与えた不等式のある種の精密化となっている。また、われわれの不等式は、Perssonや足利が一般型代数曲面を多数構成する際に用いた特異点に付随する「特殊化ベクトル」の傾きの概念を抽出し精密化したものとも言える。

さらに、得られた不等式を用いて、正規6次元のうち標準曲面であるもののもつ特異点に対して強い制限を加えることができたのも著しい成果のひとつである。

(3) 研究期間中には一般の2次元正規特異点に対する不等式は得られなかったが、本研究を通して示された2重点や巡回型3重点に対するネーター型不等式を基にすれば、一般の場合を予想しそれを解決する方向で研究をさらに進展させることが可能である。大域的な曲面論への更なる応用も待たれる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

[1] Kazuhiro Konno, On the Yau cycle of a normal surface singularity, *Asian J. of Math.* 16 (2012), 279 - 298. (査読有)

[2] Kazuhiro Konno and Daisuke Nagashima, Maximal ideal cycles over normal surface singularities of Brieskorn type, *Osaka J. Math.* 49 (2012), 225 - 245. (査読有)

[学会発表](計 5 件)

[1] Kazuhiro Konno, On the fixed part of a non-special linear system over a normal surface singularity, *Classification of Algebraic Varieties and Related Topics*, 2013年9月9日, Cetraro (Italy)

[2] 今野一宏, Numerical invariants of fibred algebraic surfaces, 特異点と多様体の幾何学 2012, 2012年8月24日~27日, 山形大学理学部

[3] Kazuhiro Konno, Normal sextic surfaces which are canonical, WCU workshop on classification and construction of algebraic varieties, 2012年5月26日~28日, Busan (Korea)

[4] 今野一宏, Normal sextics which are canonical, 高次元代数多様体とベクトル束の代数幾何, 2012年3月16日, 九州大学

[5] Kazuhiro Konno, Regular canonical surfaces of degree $3n-3$ in P^n , Parts I and II, Two Weeks of Classical Algebraic Geometry, Univ. Padova (Italy), 2011年5月16日~25日.

〔図書〕(計 1 件)

[1] 今野一宏「代数曲線束の地誌学」, 内田老鶴圃, 2013年, ISBN 978-4-7536-0201-8.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

今野 一宏 (KONNO KAZUHIRO)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 10186869