

平成 26 年 5 月 30 日現在

機関番号：14401

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2013

課題番号：23654009

研究課題名(和文)ミラー対称性と非可換ホッジ構造の研究

研究課題名(英文)Study on mirror symmetry and noncommutative Hodge structures

研究代表者

高橋 篤史(TAKAHASHI, ATSUSHI)

大阪大学・理学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：50314290

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円、(間接経費) 810,000円

研究成果の概要(和文)：シンプレクティック幾何学と複素代数幾何学という二つの一見全く無関係に見える数学が、自分と鏡像の関係のように常に一体として対称的にあらわれるという現象があり、それはホモロジー的ミラー対称性と呼ばれている。本研究はホモロジー的ミラー対称性の理解における極めて重要な問題の解決に向けての活路を探究することである。  
カラビヤウ  $d_g$  圏に対して定まるホモトピー微積分代数に対する形式化予想を仮定することにより、原始形式が構成でき、さらには平坦構造が得られるということを示したのが本研究の成果である。

研究成果の概要(英文)：Homological mirror symmetry is a symmetry which interchanges the role of the symplectic geometry and the complex algebraic geometry. The purpose of this research is a trial to solve one of the most important problems in the theory of homological mirror symmetry.  
Assuming a certain formality conjecture for a homotopy calculus algebra associated to a Calabi-Yau dg category, we obtain a primitive form and hence a Frobenius structure on the versal deformation space for the category.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数学 幾何学 数理物理学 ミラー対称性

## 1. 研究開始当初の背景

(1) ミラー対称性とは、シンプレクティック幾何学に対応する A 模型と複素代数幾何学に対応する B 模型という、二つの位相的弦理論の等価性のことである。ミラー対称性は、定性的・定量的なさまざまな予想を与え、これまで個別に研究されてきた数学を結び付ける、極めて興味深い現象である。

(2) とくに重要な課題は、ホモロジー的ミラー対称性予想の証明である。これは A 模型および B 模型に対して「プレーン」のなす  $d$   $g$  圏（または A 無限大圏）を独立に構成し、それらの間に圏同値を示すという問題であり、ミラー対称性の起源を自然に説明するために Kontsevich 氏が 1994 年に提唱したものである。深谷賢治氏・小野薫氏・太田啓史氏・Oh 氏・Seidel 氏をはじめとする多くの研究者により、これまでにさまざまな重要な成果が得られている。研究代表者も特異点のホモロジー的ミラー対称性の研究で基本的な貢献をしている。

(3) ミラー対称性には、古典的ミラー対称性予想と呼ばれる、Gromov-Witten 不変量の理論とホッジ構造の変形理論の等価性を予想する現象が知られている。ホモロジー的ミラー対称性が比較的定性的なものであるのに対して、古典的ミラー対称性は比較的定量的なものである。これらのミラー対称性は独立ではなく、ホモロジー的ミラー対称性の帰結として、古典的ミラー対称性が函数的に得られるということも、Kontsevich 氏によって予想されたことである。そこで、 $d$   $g$  圏（または A 無限大圏）から函数的にホッジ理論および平坦構造（フロベニウス構造）を構成することが具体的研究課題となった。

(4) 一方、これまでに知られている、最も普遍性のある平坦構造の構成法は、齋藤恭司氏による原始形式の理論である。これは超曲面特異点の変形理論に対して定式化されたものであるが、詳細を見てみると、非常に圏論的不変量との類似があることがわかる。したがって、 $d$   $g$  圏（または A 無限大圏）に対する原始形式の理論の構成が望まれることとなった。

## 2. 研究の目的

(1) 本挑戦的萌芽研究における目的は、カラビヤウ  $d$   $g$  圏に対する非可換ホッジ理論・原始形式・平坦構造の構成という、ホモロジー的ミラー対称性の理論における極めて重要な問題の解決に向けての活路を探究することである。

(2) 非可換ホッジ構造とは、原始形式の理論に登場した、フィルター付きドラムコホモロジー群・Gauss-Manin 接続のアイデアに基づき、通常のホッジ構造を一般化したもので

あり、Katzarkov 氏・Kontsevich 氏・Pantev 氏によって導入された。

(3) 非可換ホッジ構造の原型であるホッジ構造と周期写像の理論を展開するためには、複素ベクトル空間・フィルター・重み・整構造・偏極が必要である。しかしながら、非可換ホッジ構造には整構造・偏極の一般化となるべき対象が構成されておらず、理論として未完成である。したがって、原始形式の構成および平坦構造の導出に大きな困難があった。

(4) そこで、本研究では、非可換ホッジ構造に対する偏極と整構造の基礎理論を構築し、カラビヤウ  $d$   $g$  圏に対して非可換ホッジ構造を函数的に構成することを具体的目標とした。

## 2. 研究の方法

(1) 非可換ホッジ理論に対して、整構造および偏極を構成するために、以下の具体的課題に対して解決を試みた。また、連携研究者である入谷寛氏をはじめとする国内外の関連分野の研究者との密接かつ頻繁な研究打ち合わせを行うことにより、研究課題の遂行を促進した。

(2) 代数閉体上コンパクトで滑らかな  $d$   $g$  圏に対して、ホッホシルトホモロジー群上に非退化で次数付き対称な双線型形式を構成する。

(3) ホッジ・ドラムの退化が成立する代数閉体上コンパクトで滑らかな  $d$   $g$  圏に対して、周期的巡回ホモロジー群上に高次剰余形式を構成する。

(4) 周期的巡回ホモロジー群上に Bondal 氏・Toen 氏・Kaledin 氏によって導入されたガンマ整構造と、(2)で構成される高次剰余形式との整合性を調べる。

(5) 代数閉体上コンパクトで滑らかなカラビヤウ  $d$   $g$  圏に対して原始的切断を構成する。

(6) 代数閉体上コンパクトで滑らかなカラビヤウ  $d$   $g$  圏に対して、特性指数(exponent)を定める。

(7) 代数閉体上コンパクトで滑らかなカラビヤウ  $d$   $g$  圏に対して、その半普遍変形の空間上に齋藤構造（フィルター付きドラムコホモロジー群・Gauss-Manin 接続・高次剰余形式）を構成する。また、(4)で得られる原始的切断とともに原始形式を定め、平坦構造（フロベニウス構造）が函数的に構成されることの証明をおこなう。

#### 4. 研究成果

(1) ホモロジー的ミラー対称性から古典的ミラー対称性を函数的に導出する研究は、これまでカラビヤウ dg 圏の平坦変形を司ると期待される変形空間の基本構造を記述するにとどまっていた。このため、平坦構造はもちろんのこと、原始形式を構成するには至らず、ホモロジー的ミラー対称性から古典的ミラー対称性を導く計画は暗礁に乗り上げかかっていた。本研究における成果はこの困難に活路を開いたことである。

(2) 上記の困難の原因は、カラビヤウ dg 圏に対して定まるホモトピー微積分代数に対する形式化予想 (formality conjecture) の証明がなされていないことであると研究代表者は考えた。そして、逆にこの形式化予想を仮定することにより、原始形式が函数的に構成できさらには平坦構造が得られると示した。

(3) 形式化予想を仮定した際の原始形式の構成は、超曲面孤立特異点の変形理論に対して齋藤恭司氏が最初に行ったものに「文字の置き換え」の操作をするだけでなされる、非常に自然なものであることがわかった。とくに、これまで得られていた変形空間の基本構造、滑らかさとアフィン構造の存在、に関しても、形式化予想を用いる本研究の手法では非常に簡明かつ標準的な証明を与えることができる。

(4) したがって、ホモロジー的ミラー対称性から古典的ミラー対称性を導く際の本質的課題は、カラビヤウ dg 圏に対して定まるホモトピー微積分代数に対する形式化予想の証明であることを発見したのが、本研究の主要成果だということができる。なお、この成果をまとめて、現在論文として準備している最中であり、今年末ごろまでに研究集会「Primitive forms and related subjects」の報告集に投稿する予定である。

(4) しかしながら、課題も残された。すなわち、カラビヤウ dg 圏に対して定まるホモトピー微積分代数に対する形式化予想は、具体的証拠は得られていないものの、その成立が十分に期待される自然な予想である。ただし、今のところ予想解決のための糸口が得られておらず、先が見通せない極めて難しい状況にある。

(5) 非可換ホッジ構造の偏極については、カラビヤウ構造 (とくにセール双対性) を用いて人工的に構成したものをを用いている。ひとまず非可換ホッジ構造の偏極を人工的にせよ構成できたことは成果として挙げることができる。特異点に対する非可換ホッジ構造のように、単純ホロノミー性が成立するならば、これは自然に構成されるべきものの一

致することになるので、ある意味問題ないとはいえる。しかし、本来の目的である、ホッホシルトホモロジー群や周期的巡回的ホモロジー群上に適切な双線型形式を定めることにより偏極を構成することは、今後の課題として残された。

(6) さらに、整構造に関しては、残念ながら成果と言えるものはほとんど得られず、これも今後の課題として残されることとなつてしまった。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 0 件)  
なし

〔学会発表〕(計 7 件)

Atsushi Takahashi, From Calabi-Yau dg categories to Frobenius manifolds via primitive forms: a work in progress, 研究集会「Primitive forms and related subjects」, 2014 年 2 月 11 日, 東京大学国際高等研究所数物連携宇宙研究機構

Atsushi Takahashi, From Calabi-Yau dg categories to Frobenius manifolds via primitive forms: a work in progress, Algebraic geometry seminar, 2013 年 2 月 18 日, Leibniz University Hannover (GERMANY)

Atsushi Takahashi, From Calabi-Yau dg categories to Frobenius manifolds via primitive forms: a work in progress, UK-Japan MATHEMATICAL FORUM on Algebraic Geometry and Symplectic Geometry, 2013 年 1 月 27 日, 慶應義塾大学

高橋 篤史, 原始形式の構成方法について, 研究会「原始形式とラグランジアンフレーアー理論」, 2012 年 11 月 21 日, K K R 函館

Atsushi Takahashi, Mirror symmetry of orbifold projective lines, 2012 年 2 月 23 日, 神戸大学

Atsushi Takahashi, Mirror symmetry of weighted projective lines, 2012 年 1 月 14 日, 香港科学技術大学

Atsushi Takahashi, Categories of matrix factorizations and mirror symmetry for weighted homogeneous

polynomials, 2012年1月13日, 香港科学技術大学

〔図書〕(計1件)

高橋 篤史, サイエンス社, 弦理論の代数的基礎, 2012, 204

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

なし

取得状況(計0件)

なし

〔その他〕

下記アドレス(研究集会「Primitive forms and related subjects」の「Slides」というウェブページ)から, 「学会発表」, From Calabi-Yau dg categories to Frobenius manifolds via primitive forms: a work in progress」のために用いたスライド(Takahashi.pdf)を取得することが可能である.

<http://indico.ipmu.jp/indico/materialDisplay.py?materialId=slides&confId=30>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

高橋 篤史 (TAKAHASHI, Atsushi)

大阪大学・理学研究科・准教授

研究者番号: 50314290

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

入谷 寛 (IRITANI, Hiroshi)

京都大学・理学研究科・准教授

研究者番号: 20448400