

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 19 日現在

機関番号：14501

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2013

課題番号：23654010

研究課題名(和文)位相的場の理論、接続のモジュライ空間と幾何学的ラングランズ対応

研究課題名(英文)Topological Field theory, Moduli spaces of connections and Geometric Langlands correspondence

研究代表者

齋藤 政彦(SAITO, MASAHIKO)

神戸大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：80183044

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円、(間接経費) 810,000円

研究成果の概要(和文)：稲場と不分岐な不確定特異点の形式タイプを固定した代数曲線上の安定放物接続のモジュライ空間を、非特異な代数多様体として構成した。リーマンヒルベルト対応の解析的同型性を示し、モノドロミー保存変形から得られる非線形微分方程式の幾何学的パンルヴェ性を示した。F. Lorayと階数は2の射影直線状の確定特異点が4点以上の場合のモジュライ空間およびそのコンパクト化の記述を行い、古典的な射影双対性との関係を見出した。合わせて、放物ベクトル束のモジュライスタックおよび対応する粗モジュライ空間の詳しい記述がなされた。S. Szaboと見かけの特異点理論を整備し、幾何学的ラングランズ対応への応用を模索した。

研究成果の概要(英文)：M. Inaba and I constructed the moduli spaces of stable parabolic connections over a nonsingular projective curve with fixed formal type of regular or irregular singularities as nonsingular algebraic varieties. Moreover, we proved that the Riemann-Hilbert correspondence for these cases give an analytic isomorphism, which implies the geometric Painleve property for iso-monodromic or iso-Stokes nonlinear differential equations. Together with Frank Loray, we constructed a good model of the moduli space of rank 2 stable parabolic connections over the projective line as well as its compactification. We found unexpected relations between two Lagrangian fibrations of the moduli space of connections and the classical duality of the projective space and its dual projective space. S. Szabo and I are developing a theory of apparent singularities of connections and Higgs bundles and try to understand the geometric Langlands correspondence.

研究分野：数物系化学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：可積分系 パンルヴェ方程式 幾何学的ラングランズ対応 モジュライ理論 量子コホモロジーとミラール対称性 ラグランジュアンファイブレーション 国際共同研究 国際情報交換

1. 研究開始当初の背景

1990年代の初頭に、位相的場の理論における Cecotti-Vafa の tt^* -構造や, Bershadsky, Cecotti, Oguri, Vafa の重力の小平・スペンサー理論(BCOV 理論)などが展開された. この理論は、数学的には複素代数多様体内の一般種数の代数曲線の数え上げの問題に関する Gromov-Witten 理論や特異点の普遍変形空間における齋藤恭司の平坦構造と深く関係している. さらに C. Simpson の調和束の理論や, C. Sabbah, C. Hertling や望月拓郎などによるツイスター構造, tt^* -構造, TERP 構造などを用いて数学的に定式化されつつあった. 確定特異点を許す安定放物接続のモジュライの理論観点からモノドロミー保存変形の理論が稲場・岩崎・齋藤により精密化されている. 稲場・齋藤らによって不確定特異点を許す場合に拡張されつつあり, さらにそのモジュライ空間の幾何学的構造, ラムダ接続による Higgs 場のモジュライ空間, Hitchin 可積分系との関係が明らかになりつつあった. また, これらのモジュライ空間は幾何学的ラングランズ対応と深い関係があり, Witten や, Donagi・Pantev らのアプローチを精密化し, 再定式化が提案されつつあった.

2. 研究の目的

稲場・岩崎・齋藤の代数曲線上の確定特異点を許す接続のモジュライ空間とそのコンパクト化の理論を用いた tt^* -構造の再定式化や, それを基にした BCOV 理論や正則アノーマリ方程式の再定式化を行う. また, ラムダ接続のモジュライ空間の幾何学のモジュライ空間の詳しい解析によりいわゆる非可換ホッジ理論の再定式化や, 接続のモジュライ空間の幾何学的性質を詳しく調べる事により, 幾何学的ラングランズ対応の再定式

化と証明に向けた試みを行う. 合わせて Mirror 対称性との関係を探る.

3. 研究の方法

代数幾何学のモジュライ理論により, 接続の不確定特異点の周りの形式的な標準形を固定したときの安定放物接続のモジュライ空間の構成を行い, また対応するモノドミーやストークス係数, リンクなどのデータのモジュライ空間との一般化されたリーマン・ヒルベルト対応の幾何学を確立し, tt^* -構造や非可換ホッジ理論への応用を図る. また, 曲線上の接続や Higgs 場のモジュライ空間のコンパクト化を行い, コンパクト化の幾何学的構造を研究する. 特に, 幾何学的ラングランズ対応等について, 接続のモジュライ空間の幾何学の観点から考察する. 国内外の共同研究者と, 共同研究を進め, また関係する国内外の研究集会, ワークショップに参加し, 関連する研究情報を適宜収集する.

4. 研究成果

平成 23 年度に, 稲場と不分岐な不確定特異点の形式的タイプを固定した時の代数曲線上の安定放物接続のモジュライ空間を, 非特異な代数多様体として構成し, 対応するリーマン・ヒルベルト対応の解析的同型性を示し, モノドロミー保存変形から得られる非線形微分方程式の幾何学的パルヴェ性を示した論文を作成し投稿し, 査読を受けた. また, 見かけの特異点の理論を S. Szabo と整備した. また, 放物接続のモジュライ空間から放物ベクトル束のモジュライ空間への自然な写像がラグランジアンファイブレーションに対して, 見かけの特異点を用いたラグランジアンファイブレーションについて考察し, それらが互いに横断であることをいくつかの例で観察した. この点について,

射影直線上で階数が2で4点確定特異点の場合、すなわちパンルヴェ VI 型方程式の場合に、F. Loray と C. Simpson と共著論文を発表した。冊子体による論文発表は2013年になっているが、2012年にはオンラインでフランス数学会の報告集に受理された。しかし、その後、冊子体の出版が遅れて、2013年に出版となった。

平成24年度は、稲場との共著論文についてレフェリーからいくつかの問題点の指摘があり、それを解決し学会誌より出版した。新たに、ストークスラインが重複する時間変数の問題が明らかになった。また、放物接続のモジュライ空間から放物ベクトル束のモジュライ空間への自然なラグランジアンファイブレーションと、見かけの特異点を用いたラグランジアンファイブレーションについて考察し、それらが互いに横断であることをいくつかの例で観察した。F. Loray と階数は2のままで、確定特異点の数を増やした場合の記述を行い、古典的な射影双対性との関係を見出し、論文を完成し投稿中した。この論文においては放物ベクトル束のモジュライスタックおよび対応する租モジュライ空間の詳しい記述がなされた。被約でないスキームが自然に表れるが、その構造は興味深い。平成25年度は、F. Loray との論文が学術誌に受理され、オンラインで公開になった。9月に、京大数理研でD. Arinkinを招へいし、幾何学的Langlands対応との関係を討論した。特に、接続のモジュライ空間における直線束の直交性が問題であることが明らかになり、現在、その方向でArinkinたちの結果の拡張を試みている。

また、Szabo との見かけの特異点の理論の研究は、見かけの特異点と双対となる座標の導入の仕方を巡って、新しい構造が見つかりHiggs場のモジュライ空間と、接続のモジュライ空間との構造の違いが明らかになった。

また、2014年1月に幾何学的ラングランズ対応についての、セミナーを開催した。

位相的場の理論やミラー対称性に関する応用については、David Morrison, 深谷賢治, 細野忍, 村瀬元彦と討論を行い、現在までの進展状況を把握し、独自のアプローチを模索している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

- ① Frank Loray, Masa-Hiko Saito: Lagrangian Fibrations in Duality on Moduli Spaces of Rank 2 Logarithmic Connections Over the Projective Line. Int Math Res Notices (2013) doi: 10.1093/imrn/rnt232
- ② Michi-aki Inaba, Masa-Hiko Saito: Moduli of unramified irregular singular parabolic connections on a smooth projective curve. Kyoto Journal of Mathematics, Vol. 53, No. 2 (2013), 433--482. DOI:10.1215/21562261-2081261
- ③ Frank Loray, Masa-Hiko Saito and Carlos T. Simpson: Foliations on the moduli space of rank two connections on the projective line minus four points, Séminaires et Congrès 27 (2013), 115--168.

[学会発表] (計12件)

- ① Masa-Hiko Saito, On the geometry of isomonodromic differential equations (I), On the geometry of isomonodromic differential equations (II), (March 22-23, 2014), The 6th TIMS-OCAMI-WASEDA Joint International Workshop on Integrable Systems and Mathematical Physics, National Taiwan University, Taiwan, 22 - 26 March 2014 .
- ② Masa-Hiko Saito, Painlevé property for isomonodromic equations; Algebraic construction of the phase spaces and the Riemann-Hilbert correspondence , (November 4, 2013), IRMA, Strasbourg, France, 4 - 8 Nov. 2013 .
- ③ Masa-Hiko Saito, Apparent singularities and canonical coordinates for the moduli spaces of singular connections (a joint work with S. Szabo), (October 1, 2013), Symplectic Algebraic Geometry, Kansai

seminar house, Kyoto, September 29 - October 5, 2013.

- ④ Masa-Hiko Saito, Lagrangian fibration in duality on moduli space of rank two logarithmic connections over the projective line (joint work with F. Loray), (May 3, 2013), Algebraic Geometry and Differential Topology Seminar, Alfred Renyi Institute of Mathematics, Budapest, Hungary.
- ⑤ Masa-Hiko Saito, Geometry of moduli spaces of linear connections on curves and differential equations of Painlevé type, (July 3, 2012), Differential Algebra and Galois Theory, 6th European Congress of Mathematics, Kraków, Poland, July 2 - 7, 2012.
- ⑥ Masa-Hiko Saito, Geometry of moduli spaces of linear connections on curves and differential equations of Painlevé type, (June 5, 2012), Singularités d'Équations Différentielles en Géométrie Algébrique, CIRM, France, June 4 - 8, 2012.
- ⑦ Masa-Hiko Saito, Lagrangian fibrations on the moduli spaces of singular connections of curves, (June 7, 2011), 2011 TMS Summer School on Mirror Symmetry, TMS, Taiwan, June 7 - 9, 2011.
- ⑧ Masa-Hiko Saito, Ten families of linear connections, Painleve equations and monodromy data, Workshop on Isomonodromy Theory, TMS, Taiwan, June 3, 2011.
- ⑨ Masa-Hiko Saito, Geometry of Riemann-Hilbert correspondence, Isomonodromy and equations of Painleve type I, (April 18, 2011), Geometry of Riemann-Hilbert correspondence, Isomonodromy and equations of Painleve type II, (April 19, 2011), Program 2. : Integrable Systems & Frobenius Manifolds (Program in Mirror symmetry, Isomonodromy and Integrable system), TMS, Taiwan, March 1 - May 31, 2011.

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ等

<http://www2.kobe-u.ac.jp/~mhsaito/ftop-j.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

齋藤 政彦 (SAITO, Masa-Hiko)

神戸大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号 : 80183044

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者 なし