

科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 22 日現在

機関番号：15401

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2012

課題番号：23654012

研究課題名（和文）ブレイドモノドロミーの高次元化

研究課題名（英文）Higher dimensional braid monodromy

研究代表者

島田 伊知朗（SHIMADA ICHIRO）

広島大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：10235616

研究成果の概要（和文）：

代数曲面の位相幾何学的性質を調べる上で、格子の計算は重要な役割をはたす。格子に関するいくつかのアルゴリズムを C 言語のライブラリ gmp を用いて書き直した結果、格子に関する種々の計算、特に正定値格子のグラム行列が与えられたときに指定されたノルムをもつベクトルのリストを計算するスピードを圧倒的に向上させることができた。その結果、金銅誠之氏との共同研究において、標数 3 における Fermat 4 次曲面の自己同型群の生成元を完全に決定することに成功した。

研究成果の概要（英文）：

The lattice theory plays an important role in the study of topological properties of algebraic surfaces. We wrote some algorithms about lattices by using C language library gmp, and obtained strong calculating tools about lattices. The most important algorithm among them is a program that calculates the list of vectors of a given norm from a Gram matrix of a positive-definite lattice. As an application, we determined, with Sigeyuki Kondo, the generators of the automorphism group of the Fermat quartic surface in characteristic 3.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
交付決定額	2,000,000	600,000	2,600,000

研究分野：代数幾何学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：K3 曲面，格子理論

1. 研究開始当初の背景

代数曲面のネロン・セヴェリ格子において、与えられた曲線の既約成分のクラスが

生成する部分格子を決定すること、あるいは与えられた部分格子を生成する曲線を見つけることは、開代数曲面の位相的性質を調べる上で重要であるのみならず、Brauer 群を通じてその代数曲面の数論的性質を調べる上でも重要である。

研究代表者と研究分担者は、この問題に対して計算を実行するアルゴリズムを開発し、いくつかの代数曲面に対して適用し結果を得ることができた。(すでに論文として発表済み。)

しかし、重要な多くの場合(たとえばフェルマー曲面)に対しては、時間とメモリーが足りないために計算を断念せざるを得ず、方法の改良の必要性を認識した。

2. 研究の目的

上記 1 に述べた研究において、我々は市販の計算代数ソフトウェアを用いて計算を行っていたが、いくつかのきわめて時間のかかる計算ステップが、大きな階数の格子に関する計算に集中していることを見いだした。特に正定値格子のグラム行列が与えられたときに、指定されたノルムをもつベクトルのリストを計算する部分が計算時間のほとんどを占める。

そこで、計算機プログラムの性能向上をはかるために、既存の計算代数ソフトウェアを用いるのではなく、C 言語で基盤から作成することにした。特に格子理論に対するアルゴリズムに関しては、他の研究分野、特に正標数の代数幾何学や、さらには有限群論や符号理論への転用も視野に入れ、できるだけ汎用性が高く、かつインターフェイスが単純で使いやすいものを書くこととした。

3. 研究の方法

多倍長整数計算を非常に高速に行う C 言語のライブラリである `gmp` を用いて一群のプログラムを書いた。

また、代数幾何および位相幾何の研究集会にできるだけ多く出席して、幾何学の分野において必要とされる格子理論的なアルゴリズムに関する情報を収集し、われわれのプログラムの新しい応用を発見することにつとめた。

4. 研究成果

プログラムを書き直した結果、格子に関する種々の計算のスピードを圧倒的に向上

させることができた。このプログラムを用いることにより以下の結果を得た。

(1) 複素 $K3$ 曲面および標数が奇素数の基礎体上の超特異 $K3$ 曲面に対しては Torelli 型の定理が証明されているので、Borcherds-Kondo の方法を用いることにより、その自己同型群の生成元をネロン・セヴェリ格子から決定することができる場合がある。

この方法のうち、Leech 格子におけるベクトルの詳細な知識が必要とされていたステップを、計算機を用いた機械的な計算に置き換え計算を自動化した。応用として標数 3 における Fermat 4 次曲面(すなわち Artin 不変量が 1 の超特異 $K3$ 曲面)の自己同型群の生成元を与え、さらに nef 錐における自己同型群の基本領域を明示的に書き下すことに成功した。

この仕事は研究代表者と名古屋大学の金銅誠之氏との共同研究であり、すでに論文が学術雑誌に受理されている。

(2) 研究代表者は、Borcherds-Kondo の方法を一般化し適用できる $K3$ 曲面のクラスを大幅に拡大した。さらにこのアルゴリズムが常に有限ステップで終了することを証明した。

基本領域の境界を決定するためには、格子理論的アルゴリズムの他に、線形計画法のアルゴリズムも必要とする。そのアルゴリズムを計算機に実装し、いくつかのピカール数の小さな複素楕円 $K3$ 曲面に対して実験を行った。

また、複素数体上の Fermat 4 次曲面にも適用し、多くの非射影的な自己同型をネロン・セヴェリ格子の自己同型の形で実現した。

(3) 標数 5 における Artin 不変量が 1 の超特異 $K3$ 曲面は、Fermat 6 次曲線(すなわち標数 5 におけるエルミート曲線)で分岐する射影平面の 2 重被覆として実現される。

研究代表者は、この $K3$ 曲面の自己同型群を研究する過程において、 $q+1$ 次エルミート曲線に $q+1$ 個の点で接する 2 次曲線に関する B. Segre の結果を高次元のエルミート超曲面に一般化した。この結果に関しては、すでに論文が学術雑誌に受理されている。

(4) 研究代表者は金銅誠之氏との共同研究において、Artin 不変量が 1 の超特異 $K3$ 曲面と Artin 不変量が 10 の超特異 $K3$ 曲面のネロン・セヴェリ格子の双対性を用いて、Artin 不変量が 10 の超特異 $K3$ 曲面についていくつかの興味深い幾何学的結果を得た。

特に、周期が generic な Artin 不変量 10 の超特異 K3 曲面の存在を証明し、標数が 2 および 3 の場合にこれらの K3 曲面の nef 錐の自己同型群の生成元を求めた。

また、計算機を用いた研究とは別に、以下の研究成果を得た。

(5) 研究分担者の高橋宣能は、結び目理論における重要な抽象代数系であるカンドルを代数幾何学の枠組みで定式化し、カンドル構造の与えられた代数多様体を代数カンドルと定義してその構造を研究した。その結果、代数的に連結な(すなわち内部自己同型群の作用が推移的である)代数カンドルが代数群の商として記述できることを示した。

(6) 研究代表者の島田伊知朗は、Hoang Than Hoai との共同研究により、正標数特有の non-reflexivity をもつ対称性の高い平面曲線である Ballico-Hefez 曲線の定義方程式と自己同型群を決定した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

1. S. Kondo and I. Shimada,
The automorphism group of a supersingular K3 surface with Artin invariant 1 in characteristic 3,
Int. Math. Res. Not. (掲載決定)
査読あり

2. Ichiro Shimada,
A note on rational normal curves totally tangent to a Hermitian variety,
Des. Codes Cryptogr. (掲載決定)
査読あり

3. Nobuyoshi Takahashi,
Nonstandard point counting for algebraic varieties.
Comm. in Algebra 41(2013), no. 3,
971--988. 査読あり

4. Kenichiro Kimura, Shun-Ichi Kimura and Nobuyoshi Takahashi,
Motivic zeta functions in additive monoidal categories,
J. K-Theory, 9 (2012) 459-473.
査読あり

5. Ichiro Shimada,

On Frobenius incidence varieties of linear subspaces over finite fields.
Finite Fields Appl. 18 (2012), no. 2,
337-361.

査読あり

[学会発表] (計 7 件)

1. Ichiro shimada,
Supersingular K3 surfaces with Artin invariant 10 (joint work with S. Kondo)
New Trends in arithmetic and geometry of algebraic surfaces
12 March, 2013
CIRM, Luminy, France

2. Ichiro shimada,
Supersingular K3 surfaces with Artin invariant 10 (joint work with S. Kondo)
Arithmetic and Algebraic Geometry 2013
29 January, 2013
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

3. Ichiro shimada,
On rational normal curves totally tangent to a Hermitian variety
射影多様体の幾何とその周辺 2012
08 October, 2012
高知大学理学部

4. Ichiro shimada,
The automorphism group of Fermat quartic surface in characteristic 3 (joint work with S. Kondo)
特異点と多様体の幾何学
27 August, 2012
山形大学理学部

5. Ichiro shimada,
超特異 K3 曲面の次数 2 の射影モデルについて
代数幾何ワークショップ
8 December, 2011
東京大学大学院数理学研究科

6. Ichiro shimada,
Supersingular K3 surfaces in characteristic 5
代数幾何学研究集会-ファノ多様体と正標数上の話題を中心として-
21 February, 2011
九州大学伊都キャンパス数理学研究教育棟

7. Ichiro shimada,

標数 5 における超特異 K3 曲面
日本数学会中四国支部
29 January, 2011
鳴門地場産業振興センター

[その他]
ホームページ等

<http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~shimada/index.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

島田 伊知朗 (SHIMADA ICHIRO)
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：10235616

(2) 研究分担者

高橋 宣能 (TAKAHASHI NOBUYOSHI)
広島大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：60301298

(3) 連携研究者

()

研究者番号：