

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 14 日現在

機関番号：17102

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2013

課題番号：23654013

研究課題名(和文) 実二次体上の「クロネッカーの青春の夢」を  $j$ -関数に託して

研究課題名(英文) Potential role of the elliptic modular  $j$ -function in the "Kronecker's dream of youth" for real quadratic fields

研究代表者

金子 昌信 (KANEKO, Masanobu)

九州大学・数理(科)学研究科(研究院)・教授

研究者番号：70202017

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円、(間接経費) 750,000円

研究成果の概要(和文)： $j$ -関数のマルコフ2次無理数における値のある種の連続性をファレイ分数の言葉で定式化した。  $j$ -関数の実二次点での値そのものについての数論的性質の解明には至らなかった。しかしマルコフ数のファレイ分数によるパラメトリゼーションを用いてマルコフ数のある種の新しい合同式を証明することが出来たほか、実二次数の caliber について、広義、狭義ともに、その偶奇を完全に決定できた。他には一変数モジュラー形式のフーリエ係数の合同、楕円曲線との関連などの結果を得た。

研究成果の概要(英文)：Although we have not yet succeeded in obtaining any arithmetic quantities from the "values" of the elliptic modular  $j$ -function, we have obtained on the way some arithmetic results concerning Markoff numbers. We have formulated a kind of Diophantine continuity of the values of  $j$ -function at Markoff irrationalities in terms of Farey parametrization of Markoff numbers.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学、代数学

キーワード：楕円モジュラー関数 実二次体 類体 マルコフ数 虚数乗法 caliber

1. 研究開始当初の背景

19世紀, クロネッカーは代数方程式の研究から, 有理数体上のアーベル方程式はいわゆる円周等分方程式で尽くされることを見いだし(現在「クロネッカー-ウェーバーの定理」として知られる), さらに歩を虚二次体上のアーベル方程式へと進め, それらが「特異モジュラスを持つ楕円関数の変換方程式と等分方程式で尽くされる」ことを予想(これが「クロネッカーの青春の夢」として知られる予想であった), その解決のための重要な理論をほぼ構築してのち世を去った.

類体論の完成によりこの予想も完全に解決されたが, ヒルベルトは更なる一般化として, いわゆる「ヒルベルトの第12問題」を1900年のパリにおける国際数学会議の折に提唱, これは今なお未解決の難問である. この問題を一言でいうと「代数体のアーベル拡大がその特殊値で生成されるような, 適当な解析関数を見いだすこと」となる. 有理数体上の場合は指数関数(単位円を等分する点での値), 虚二次体の場合は楕円モジュラー  $j$ -関数(虚二次点での値)と楕円関数(周期の等分点での値)がそれぞれ基礎体上のアーベル拡大生成を担う解析関数である. この美しい成功を承け, 次に取り組むべき自然な問題は, 「では実二次体の場合に考えるべき解析関数は何であるか, そしてその関数のどういう値がアーベル拡大を生成するか?」ということになる. ヘッケや志村による先駆的な研究もあるが, 現在この問題の解答として最も有力視されているのはいわゆるスターク-新谷予想, また新谷によるバーンズ型多重ゼータ関数の研究であろう. しかし, これらの継承と見なせる近年の研究(たとえば多重三角関数)をもってしてもなお, 決定的な結果にはまだほど遠いのが実情である.

申請者は長年の楕円モジュラー  $j$ -関数にまつわる様々な研究から,  $j$ -関数が実二次体に対しても何か役割を果たさないだろうかとの夢想するに到った. これがあながち夢物語ではないということは, ヘッケの古い仕事, および加藤信一による, 実二次体の量指標に関連したマース波動形式の実軸上での振る舞いを超関数的にとらえようとする先駆的研究がある種のサポートを与えるほか, 代表者が最近行った, 計算機実験に基づく著しい現象の観察(Observations on the 'Values' of the elliptic modular function  $j(\cdot)$  at real quadratics, Kyushu J. Math., vol. 63-2, 353-364, (2009), 紙幅の関係でその詳細を述べる余裕がないが, リーマン予想を連想させるような現象や, 黄金比の果たす特別な役割など非常に興味深いと信ずる) およびそれに密接に関連するデューク-イマモグル-トスの研究(Cycle integrals of the  $j$ -function and mock modular forms, Ann. of Math. (2) 173, (2011), no. 2, 947-981, ごくおおざっぱに言うと,  $j$  関数の実2次点での(以下に述べる意味での)値の「トレース」

の母関数が, mock modular form と呼ばれるクラスのモジュラー関数になっているというもの)が示唆している. そこで, 本研究において, 楕円モジュラー  $j$ -関数の, 実二次点での双曲型フーリエ展開の定数項をもってその点での正規化された「値」と見なしたとき, この値そのものでないにせよ, これから適当な仕方で定まる量が基礎の実二次体のアーベル拡大を生成するか, またはその二次体の何らかの数論に関わる量になっていないか, について調べようとしていた.

2. 研究の目的

広くはモジュラー関数一般であるが, とりわけ楕円モジュラー  $j$ -関数の実二次点での振る舞いを理解すること, ひいてはそれを通し「クロネッカーの青春の夢」の実二次体版になにがしかの貢献をすること. 少なくともマルコフ二次無理数の場合に観察される現象の定式化と証明を与え, 代数的量を取り出すこと. 関連して, 実二次体の caliber(口径, 与えられた判別式を持つ被約2次形式の個数)に関する知見を深めること. またモジュラー関数, モジュラー形式一般に関する結果と実二次体の数論とをいかなる形にせよ関連づけられないかを考察すること.

3. 研究の方法

Zagier や Duke, Imamoglu, Manin 他, 関連する研究者達との議論を基盤に, 計算機実験も行いつつ,  $j$ -関数の実二次点での値から数論的な量を取り出す試みを行う. また, マルコフ二次無理数について秋山茂樹と, 実軸上での振る舞いの超関数論的扱いについて加藤信一と議論をしながら, 研究目的の達成に向けたアプローチを探る. 計算機実験は  $j$ -関数以外にも広げてゆき, 最終年度にはマルコフ二次無理数関係の現象の解明と, 代数的量の取り出しに成功すべく, 各方面の研究者と議論を深めながら研究を進めることを企図していた. Hecke などの古典を新たな視点で見直すことも研究方法の一つである.

4. 研究成果

実二次数のなかで, ディオファントス近似的に特別な役割を果たすマルコフ二次無理数という系列がある. Kyushu Journal 論文での観察は,  $j$ -関数の実二次点での「値」が有理近似の度合いを測っていることを示唆しており, この特別なマルコフ二次無理数での値の示す挙動は確かに何かがあるに隠れていることを物語っていた. この研究においてまず, マルコフ数をファレイ分数でパラメトライズし(これは古典的に Frobenius によってなされていることと等価であったが, より見やすい定式化を行った), そのパラメトリゼーションの言葉で, マルコフ二次無理数での値の「ディオファントス連続性」とでも呼べるものを定式化した. しかしながらその証明には至らなかった. しかし副産物として, マ

ルコフ数のファレイ分数によるパラメトリゼーションを用いてマルコフ数のある種の新しい合同関係式を証明することが出来た。これは米国ハワイでの研究集会その他で講演を行ったが、論文にはまだまとめていない。この成果を含む広いサーベイ論文を計画中である。そのほか、実二次数の caliber (類数がその細分化として得られるような数であり、興味深い対象であると思うが、まだそれほど多くの研究がなされていない) について、広義、狭義ともに、その偶奇を完全に決定できた。これは、以前の K.Mori と共同で行った、判別式が二つの素因子からなるような場合の caliber の、4 を法とした値についての研究 (Congruences modulo 4 of calibers of real quadratic fields, Ann. Sci. Math. Québec (2011)) を、偶奇という粗い形ながら、すべての判別式について完全に決定したものである。この成果は H.Sakata, M.Takeuchi との共著論文「On the parity of calibers of real quadratic orders」としてまとめ、現在投稿中である。

本来の研究目的である、楕円モジュラー  $j$ -関数の実二次点での振る舞いについて、現在実験的にのみ観察されている現象を理論的裏付けを与えることで理解すること、ひいてはそれを通じ、虚二次体上の類体構成に関するいわゆる「クロネッカーの青春の夢」の実二次体版 になにがしかの貢献をすること、については、最終的な目的達成には至らず、むしろ非常に難しい問題であることを再認識させられた。結果的には、期待された代数的量を取り出すことも出来なかった。しかしながら、研究の過程で、 $j$ -関数の実二次点での値については期間中に国際研究集会で発表の機会があり、そこでは問題提起として2変数の  $j$ -関数の可能性(テータ関数を用いて具体的に定義される関数をその候補として挙げた)、また解析関数を離れ、 $SL(2, R)$ 上の関数として現象を理解できる可能性(これは力学系理論における E.Ghys の研究と密接に関連するのではないと思われる)などに言及した。これらはいずれも今後の興味深い研究方向を示していると思われる。また、Manin とは、彼の非可換トーラスの等分点を用いた実二次体上の類体構成のアプローチとの関連について議論を行った。成果は得られなかったが、これも一つの重要な方向であると思われる。

また広くモジュラー関数との関係ということであろうと、有理数体上定義された楕円曲線をモジュラー関数でパラメトライズすることに関し、重さ4のアイゼンシュタイン級数の満たす微分方程式を元に有理数体上の楕円曲線を取り出し、それに付随する newform がエータ積で書けるような楕円曲線のすべて(このような楕円曲線の分類は Y.Martin-K.Ono の論文 (Eta-quotients and elliptic curves, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), no. 11, 3169-3176) によって

以前に得られていた)をこの方法で得ることが出来ることを Y.Sakai と共に示したことや、ある有理型モジュラー形式のフーリエ級数の合同関係式を Y.Honda と共に導いたこと、レベル2のモジュラー形式と二重ゼータ値との関係を K.Tasaka と見いだしたこと、などを論文として公表するとともにいくつかの研究集会で講演した。さらに、K.Nagatomo, Y.Sakai と共同で、以前の Kaneko-Zagier, Kaneko-Koike の二階の微分方程式を満たすモジュラー形式の研究を頂点作用素代数への応用を念頭に見直し、物理学者達によって得られていた二次元共形場理論の分類の再構成などを行った。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計4件)

M. Kaneko, K. Tasaka, Double zeta values, double Eisenstein series, and modular forms of level 2, *Mathematische Annalen*, 査読有, 357 (3), 2013, 1091-1118, DOI:10.1007/s00208-013-0930-5 <http://catalog.lib.kyushu-u.ac.jp/recordID/27531>

M. Kaneko, Y. Sakai, The Ramanujan-Serre differential operators and certain elliptic curves, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 査読有, 141 (10), 2013, 3421-3429, DOI:10.1090/S0002-9939-2013-11917-9 <http://catalog.lib.kyushu-u.ac.jp/recordID/27241>

M. Kaneko, K. Nagatomo, Y. Sakai, Modular Forms and Second Order Ordinary Differential Equations: Applications to Vertex Operator Algebras, *Letters in Mathematical Physics*, 査読有, 103 (4), 2013, 439-453, DOI:10.1007/s11005-012-0602-5 <http://catalog.lib.kyushu-u.ac.jp/recordID/26122>

Y. Honda, M. Kaneko, On Fourier coefficients of some meromorphic modular forms, *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 査読有, 49(6), 2012, 1349-1357, DOI:0.4134/BKMS.2012.49.6.1349 <http://catalog.lib.kyushu-u.ac.jp/recordID/25521>

[学会発表](計8件)

M. Kaneko, On the elliptic modular function  $j$ , *Modular functions and Quadratic forms -- Number theoretic delights*, 2013年12月21日, 大阪大学

中之島センター

M. Kaneko, mod  $p$  多重ゼータ値について, 関西多重ゼータ研究会, 2012年11月17日, 大阪工業大学

M. Kaneko, Double zeta values and modular forms, Modular form seminar, 2012年11月7日, National Center for Theoretical Sciences, Taiwan

M. Kaneko, The Ramanujan-Serre differential operators and certain elliptic curves, Number theory seminar, 2012年11月7日, National Center for Theoretical Sciences, Taiwan

M. Kaneko, Markoff 数について, 整数論・力学系セミナー, 2012年4月27日, 弘前大学理工学部

M. Kaneko, Congruences of Markoff numbers via Farey parametrization, Special Session of the AMS 2012 Spring Western Section Meeting, 2012年3月4日, University of Hawaii at Manoa, USA

M. Kaneko, The Ramanujan-Serre differential operators and certain elliptic curves, Hawaii Conference in Algebraic Number Theory, Arithmetic Geometry and Modular Forms, 2012年3月6日, University of Hawaii at Manoa, USA

M. Kaneko, Markoff numbers and Farey sequences, The 1st International Congress on Natural Sciences (ICNS2011), 2011年8月26日, Pukyong National University, Korea

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計0件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~mkaneko/paper.html>

<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~mkaneko/lecture.html>

<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~mkaneko/english/list.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

金子 昌信 (KANEKO, Masanobu)

九州大学・大学院数理学研究院・教授

研究者番号：70202017

(2) 研究分担者

( )

研究者番号：

(3) 連携研究者

( )

研究者番号：