

## 科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）研究成果報告書

平成25年 3月31日現在

機関番号：32612  
 研究種目：挑戦的萌芽研究  
 研究期間：2011～2012  
 課題番号：23654015  
 研究課題名（和文） 非可換数論の新展開  
 研究課題名（英文） New development of non-commutative number theory  
 研究代表者  
 栗原 将人 (KURIHARA MASATO)  
 慶應義塾大学・理工学部・教授  
 研究者番号：40211221

## 研究成果の概要（和文）：

まずたくさんの数値例に対して、A. Nickel による非可換 Brumer 予想が成立することを確かめた。今まで知られている定理が適用できないような数値例で、非可換 Brumer 予想、非可換 Brumer-Stark 予想が成立する例をたくさん構成した。次に、非可換拡大に含まれる可換拡大の Brumer 予想および Brumer-Stark 予想と、非可換 Brumer 予想・非可換 Brumer-Stark 予想との関係を調べた。このことにより、特にある種の条件をみたす2面体拡大の場合に、非可換 Brumer-Stark 予想のやや弱い版が多くの場合に成立することがわかった。

## 研究成果の概要（英文）：

We verified the non-commutative Brumer and Brumer-Stark conjectures by A. Nickel for various numerical examples for which one cannot apply the known theorems. We also studied the relationship between the non-commutative Brumer and Brumer-Stark conjectures and the commutative Brumer and Brumer-Stark conjectures of the sub-extensions. Using this, we verified a weak version of these conjectures especially for dihedral extensions satisfying some properties.

## 交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
交付決定額	1,200,000	360,000	1,560,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：数論、イデアル類群、非可換拡大

## 1. 研究開始当初の背景

従来、非可換拡大の数論と言うと、類体論の非可換化のことであり、Langlands 予想にかかわるさまざまな領域が主題であった。しかしながら、類体論の基となった円分体、Abel 体の整数論には、類体論によって代数体に拡張できていない対象物も多い。たとえば、円単数、Gauss 和、Stickelberger の定理、類体の具体的構成などである。この研究

の背景にあるのは、Bloch Kato 予想の一般化である非可換同変玉川数予想の観点から、以上のような円分体の整数論特有の対象物を非可換拡大に一般化しようということである。特に、A. Nickel によって最近定義された非可換 Fitting invariant を中心として、イデアル類群のような数論的对象物を、非可換拡大上で Galois 加群として考え、その構造について非可換 Galois 群の作用をこめて研究したいと考えた。Burns と Johnston は、

論文[1]において、Stickelberger 元の類似を非可換拡大の場合にも考え、通常の Stickelberger の定理と比べると弱い形ではあるが、イデアル類群を消す元をゼータ関数由来の Stickelberger 元から構成した。また、A.Nickel は非可換 Fitting invariant というものを定義して、総実代数体上の abel 拡大のイデアル類群の Fitting ideal に関する Greither の結果を一般化した。以上のような最近の新しい結果をふまえて、このような非可換 Galois 拡大の現象を一般的、統一的に解明していきたいと考えた。

もちろん、円分体における古典的対象物を非可換拡大に一般化するなどという都合のよいことがうまくいくはずがない、ということが最初に思い浮かぶ。しかしながら、Burns Johnston の論文 [1] では、Stickelberger 元の類似を非可換拡大の場合にも考え、しかも通常の Stickelberger の定理と比べると弱い形ではあるが、イデアル類群を消す元をゼータ関数由来の Stickelberger 元から確かに構成している。一方、論文 [2] において、A.Nickel は非可換 Fitting invariant というものを定義して、総実代数体上の abel 拡大のイデアル類群の Fitting ideal に関する Greither の結果を一般化した。両者共にイデアル類群を消す群環の元を構成している。このように、Gauss, Kummer の後を受けて証明された有名な Stickelberger による古典的定理の非可換類似が弱い形ではあるが、最近証明されているのである。しかしながら、なぜこのようなことが成立するのか、という解析はまだ十分になされていない。古典的 Stickelberger の定理は Gauss 和の素イデアル分解によって証明される。またこの定理はイデアル類群のマイナス部分の定理であり、プラス部分類似には円単数が関係する。そこで、上の非可換類似を詳しく解析することにより、Gauss 和や円単数などの非可換類似を得たいと考えたのである。また、対象を一般のモチーフに広げることにより、これらの対象への一般化も得たいと考えた。

[1] D. Burns and H. Johnston, A non-abelian Stickelberger theorem, *Compositio Math.* 147 (2011), 35-55.

[2] A. Nickel, Non-commutative Fitting invariants and annihilation of class groups, *Journal of Algebra* 323 (2010), 2756-2778.

## 2. 研究の目的

L/K を代数体の Galois 拡大、G をその Galois 群とするとき、L のイデアル類群を G 加群としてみたときの様子を知ることが、最初の目的である。特に、L 関数の値から構成される群環の元で、イデアル類群を消すも

のあるいは Fitting invariant と関係するものを作ることが最初の具体的目的である。そして、これらを考えることにより、上にも述べたように、Gauss 和や円単数の非可換類似を考えたいと考える。また、Stickelberger の定理の非可換類似を追及すること、Brumer 予想、Brumer-Stark 予想の非可換版を研究することが目的である。

もう少し具体的には、非可換な G が作用するイデアル類群の G 加群としての様子を数値例でいろいろと計算したいと考える。そして、イデアル類群を消す群環の元がどのような単項イデアルからできているのか、すなわち Gauss 和の非可換版について、具体例もこめて詳しく解析したいと考える。また、L/K に関する非可換 Brumer 予想および非可換 Brumer-Stark 予想と、L/K の中間体の abel 拡大に関する Brumer 予想、Brumer-Stark 予想との間の関連を見つけたいと考える。最近証明された非可換岩澤主予想との関係も探求する。代数的には、現在の Nickel による Fitting invariant の定義をもう少しわかりやすく計算しやすいものに改良できないかも研究する。多くの例を計算し、なぜこのような定式化が必要なのか、完全な理解を得たいと考える。

また、K 上に定義された楕円曲線や Abel 多様体の L 上の Selmer 群の G 加群としての様子についても研究する。さらには、モチーフに伴う Selmer 群についても研究し、L 関数の値から作られる群環の元によって消えること、Fitting invariant との関係についても研究する。

## 3. 研究の方法

この方面の世界の専門家達(Nickel, Burns, Greither, Johnstonら)であっても、具体的な数値例はあまりたくさんは持っていない。そこで、上記のように、多くの計算を行い、数値例もこめてたくさんの実例を考えることにする。また非可換 Galois 拡大の場合を考えると、Abel な部分拡大との関係を明らかにしていく。このように、具体的な手につくことから研究を始めていくことにする。また、この方面で最近著しい成果を挙げている A. Nickel 氏あるいは D. Burns 氏あるいは C. Greither 氏を日本に招聘して、研究を推進していくというのが当初の計画であった。実際に、A. Nickel 氏とは 2012 年 8 月に Heidelberg で討論することができた。また、D. Burns 氏とは 2012 年 3 月に London で討論することができた。また、C. Greither 氏を 2013 年 3 月に日本に招聘して、この研究を推進することができた。

#### 4. 研究成果

まずたくさんの数値例に対して、非可換 Brumer 予想が成立することを確かめた。Nickel の定理が適用できない数値例で、非可換 Brumer 予想、非可換 Brumer-Stark 予想が成立する例をたくさん構成した。

慶應義塾大学大学院理工学研究科の学生である野村次郎君を加えて活発な研究を行った。非可換拡大に含まれる可換拡大の Brumer 予想と、非可換 Brumer 予想との関係を調べた。このことにより、非可換拡大に対しても、非可換 Brumer 予想のやや弱い版が多くの場合に成立することを確かめた。より正確には、弱い版の非可換 Brumer 予想および非可換 Brumer-Stark 予想は、(G がある種の条件をみたすとき)部分 Abel 拡大の Brumer 予想および非可換 Brumer-Stark 予想に帰着できることが分かった。このことから、G が位数  $4p$  の 2 面体群のとき ( $p$  は奇素数)、また一般 4 元数数群のときに、(ある種の条件のもと)弱い版の非可換 Brumer 予想および非可換 Brumer-Stark 予想を確かめた。この方法による証明が今までの Nickel や Burns の定理と異なるのは、岩澤主予想を使わず、類数公式だけから結論を得ている点である。このことにより、 $\mu$  不変量などについての岩澤理論的仮定はつける必要がない。次に、もっと一般のモチーフに対応する L 関数の予想に置き換えると何が起こるかについても研究し、楕円曲線や Abel 多様体の Selmer 群と L 関数についても研究した。

このような有限非可換群についての性質は、射影極限に走れないものもあり、そのことから非可換岩澤主予想では零化域がうまく使えないということがわかった。また、可換の場合ではあるが、岩澤加群の Fitting イデアルが今までは完全には決められていなかった場合、特に Galois 群が巡回群  $\times \mathbb{Z}_p$  である場合に、岩澤加群の Fitting イデアルを完全に決定できることがわかった。

なお、チャレンジ性の高い内容の研究であったため、研究開始当初の目標を十分に達成できたとは言い難い状況ではあるが、今後の研究活動に生かしていくことができると考えている。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件) (すべて査読有)

(1) Masato Kurihara, Refined Iwasawa theory and Kolyvagin systems of Gauss sum type, Proceedings of the London Mathematical Society, Vol.104 (2012),

728-769.

(2) Masato Kurihara and Takashi Miura, Ideal class groups of CM-fields with non-cyclic Galois action, Tokyo Journal of Mathematics, Vol.35 (2012), 411-439.

(3) Masato Kurihara, On stronger versions of Brumer's conjecture, Tokyo Journal of Mathematics, Vol.34-2 (2012), 407-428.

[学会発表] (計 6 件)

(1) Masato Kurihara, Arithmetic of Kolyvagin systems of Gauss sum type for elliptic curves, Number Theory Forum (招待講演), 2013 年 03 月 25 日, 慶應義塾大学.

(2) Masato Kurihara, A refined Iwasawa theory and a refined Birch Swinnerton-Dyer conjecture, Arithmetic and Algebraic Geometry 2013 (招待講演), 2013 年 01 月 30 日, 東京大学.

(3) Masato Kurihara, On the structure of ideal class groups and Selmer groups I, II, III, L-functions and Arithmetic (招待講演), 2012 年 10 月 24 日~2012 年 10 月 26 日, Yonsei University, Korea.

(4) 栗原将人, Brumer-Stark 予想と Gross 予想について, 第 20 回整数論サマースクール (招待講演), 2012 年 09 月 05 日, 熊本県阿蘇郡高森町.

(5) Masato Kurihara, On the Stickelberger elements and annihilation results for class groups I, II, Iwasawa theory Workshop2012 (招待講演), 2012 年 04 月 05 日~2012 年 04 月 06 日, 大阪大学

(6) Masato Kurihara, Euler systems of Gauss sum type and the structure of Selmer modules, The 3rd Pan Asian Number Theory Conference (招待講演), 2011 年 8 月 25 日, Chinese Academy of Sciences, Beijing, China.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

栗原 将人 (KURIHARA MASATO)  
慶應義塾大学・理工学部・教授  
研究者番号：40211221

(2) 研究分担者

該当なし

(3) 連携研究者

該当なし