

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 13 日現在

機関番号：32682

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2013

課題番号：23654016

研究課題名(和文)代数幾何学的方法によるジーゲル保型形式に対する志村対応の研究

研究課題名(英文) A Study of Shimura Correspondence on Siegel Modular Forms by a Method of Algebraic Geometry

研究代表者

対馬 龍司 (Tsushima, Ryuji)

明治大学・理工学部・教授

研究者番号：20118764

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円、(間接経費) 540,000円

研究成果の概要(和文)：楕円保型形式に関する志村対応に類似する、ジーゲル保型形式に関する重さ整数の保型形式から半整数の保型形式への対応を研究した。そのため、ジーゲル保型形式に対する志村対応予想の基となった、ヤコビ形式の空間の次元に関する予想を定理とすべくコホモロジー群の消滅定理を研究した。また、ヘッケ作用素の跡公式を代数幾何学的に計算するための研究を行った。

研究成果の概要(英文)：I studied a correspondence from Siegel modular forms of integral weight to Siegel modular forms of half integral weight which is similar to the Shimura correspondence on elliptic modular forms. For that purpose I studied the vanishing theorem of cohomology groups to make the conjecture on the dimension of the spaces of Jacobi forms a theorem. I also studied to compute a trace formula of Hecke operators by a method of algebraic geometry.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：ジーゲル保型形式 ヤコビ形式 佐武コンパクト化 トロイダル・コンパクト化 リーマン・ロッホの定理 消滅定理

1. 研究開始当初の背景

1970年代に志村五郎氏は1変数の場合に、重さ整数の保型形式から重さ半整数の保型形式への対応、今日において志村対応と呼ばれている対応を発見した。

Goro Shimura: On modular forms of half-integral weight, *Ann. of Math.*, **97**, 440-481, 1973

重さ半整数の保型形式はその後世界中で研究され、保型形式論において重要な分野を形成している。

後年、コーネンによって志村対応の像が決定された。この像をコーネンのプラス空間という。

Winfried Kohnen: Modular forms of half-integral weight on $\mathfrak{so}(4)$, *Math. Ann.*, **248**, 249-266, 1980

更に、アイヒラーによってヤコビ形式が詳細に研究され、志村対応は指数1のヤコビ形式を経由する対応であることが明らかにされた。

Martin Eichler, Don Zagier: *The Theory of Jacobi Forms*, *Progress in Mathematics* **55**, Birkhauser, 1985, 148 頁

高次の場合にも同様の関係が成り立つことは予想されることである。2次で重さ半整数のジーゲル保型形式の空間の次元については、次の論文で計算した。

Ryuji Tsushima: Dimension formula for the spaces of half-integral weight and degree two, *Comment. Math. Univ. St. Paul*, **52**, 69-115, 2003

ジーゲル保型形式の場合にも、伊吹山知義氏によってプラス空間が定義され、指数1のヤコビ形式の空間とヘッケ加群として同型であることが示されていた。

Tomoyoshi Ibukiyama: On Jacobi forms and Siegel modular forms of half integral weights, *Comment. Math. Univ. St. Paul*, **41**, 109-124, 1992

ただし、プラス空間は保型形式のフーリエ係数の条件によって定義されているので、その次元を直接求めるのは困難であった。そこで、ヤコビ形式の空間の次元を計算することが重要な問題として認識された。重さ k の場合(スカラー値の場合)については次の論文で計算した(指数は任意である)。

Ryuji Tsushima: On the dimension formula for the spaces of Jacobi forms of degree two, *数理解析研究所講究録*, **1103**, 96-110, 1999

ところが、ジーゲル保型形式に関する志村対応は、重さ整数でベクトル値の保型形式から、重さ半整数でベクトル値の保型形式への対応であると予想されていたので、この結果をベクトル値の場合に拡張することが重要な問題となった。

また、スコルツパと荒川恒男氏によって定義された歪正則ヤコビ形式も、指標付きの重さ半整数ジーゲル保型形式に関連して重要であることが、伊吹山知義氏と林田秀一氏によって解明された。

Nils-Peter Skoruppa: Developments in the theory of Jacobi forms, *Internat. Conf. Automorphic Functions and their Applications*, 167-185, USSR Academy of Science, 1990

Tsuneo Arakawa: Jacobi Eisenstein series and a basis problem for Jacobi forms, *Comment. Math. Univ. St. Paul*, **43**, 181-216, 1994

そこで、この問題を次の論文で半分ほど解いた。半分ほどというのは、リーマン・ロッホの公式は計算したがコホモロジー群の消滅定理が証明できていないからである。

Ryuji Tsushima: Dimension formula for the spaces of Jacobi forms of degree two, プレプリント

従って、この論文の結果は未だ予想にとどまるのであるが、伊吹山知義氏はこの予想を使い、更に保型形式が明確に構成されている幾つかの場合を検証して、2次のジーゲル保型形式に関する志村対応予想を提出した。

Tomoyoshi Ibukiyama: A conjecture on a

Shimura type correspondence for Siegel modular forms and Harder's conjecture on congruences, Modular Forms on Schiermonnikoog, 107-144, Cambridge Univ. Press, 2008

2. 研究の目的

研究開始当初の背景で述べたジーゲル保型形式に関する志村対応を代数幾何学的方法によって研究することである。

そのためには、未だ予想にとどまっている次元公式を証明すること、即ちコホモロジー群の消滅定理を証明すること。

これに加えて、ジーゲル保型形式に作用するヘッケ作用素の跡について研究することである。

3. 研究の方法

ジーゲル保型形式・ヤコビ形式は、次数 g のジーゲル上半平面の離散群(ジーゲル・モジュラー群 $Sp(g, \mathbb{Z})$ の主合同部分群)による商空間上の正則ベクトル束の正則切断に対応している。この商空間は自然なコンパクト化(佐武コンパクト化)を持ち、その特異点解消モデル(トロイダル・コンパクト化)上にこの正則ベクトル束は延長される。

この正則ベクトル束を代数幾何学的方法によって研究し、リーマン・ロッホの定理や正則レフシェッツ不動点公式によって、この正則ベクトル束のオイラー・ポアンカレ標数を計算する。また、微分幾何学的手法によってこの正則ベクトル束の高次コホモロジー群の消滅を証明し、先に計算したオイラー・ポアンカレ標数が正則ベクトル束の正則切断の空間の次元(または跡)と等しいことが証明される。かくして問題としている空間の次元(または跡)が計算される。

4. 研究成果

研究の方法で述べた正則ベクトル束には $Sp(g, \mathbb{R})$ 不変なエルミート計量から誘導されるエルミート計量が入るのであるが、このエルミート計量がトロイダル・コンパクト化の境界に沿って退化している。従って、直ちに小平・中野型の消滅定理を応用できるという状況にはないのであるが、このエルミート計量およびケーラー距離に関する 2 乗積分可能な微分形式の芽の層の複体が、先の正則

ベクトル束の正則切断の芽の層を解消している(尻尾の部分を除いて)ことが示されれば、通常の議論で調和積分論が応用できて消滅定理が証明される。この件に関してはいささか退屈な計算が必要となるのであるが、一応の目処は付いた。

ヘッケ作用素の跡に関する研究は現在中断している。現在は 3 次のジーゲル保型形式およびヤコビ形式の空間の次元公式を計算している。ただし、これは大規模な計算になるので、幾つかの論文に分けて発表することになるが、全部を計算し終わって結果が整数になることを確認しなければ出版できないので、順次ホームページに発表して行くことになる。

指数 1 の正則ヤコビ形式の次元については伊吹山知義氏が全く別の方法で計算し、我々の予想が正しいことを示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 0 件)

〔学会発表〕(計 0 件)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.meiji.ac.jp/~tsushima>

6．研究組織

(1) 研究代表者

対馬 龍司 (TSUSHIMA RYUJI)

明治大学・理工学部・教授

研究者番：20118764

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：