

科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）研究成果報告書

平成25年5月13日現在

機関番号：14301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2012

課題番号：23654019

研究課題名（和文） 群の自己同型空間と群のリミットエレメント

研究課題名（英文） Automorphisms of groups and limit elements

研究代表者

藤原 耕二 (FUJIWARA KOJI)

京都大学・理学研究科・教授

研究者番号：60229078

研究成果の概要（和文）：区分交換写像の全体が写像の合成に関してなす群を IET と記す。ギラデルとダマニとの共同研究で、IET の部分群でリー群と同型なものは可換であることを示した。次に、タイヒミュラー空間上の「フंक距離」について多くの興味深い結果を得た。フंक距離とは古典的には平面の凸領域に対して定義されていたが、タイヒミュラー空間のフंक距離が、ユークリッド空間の場合と著しく異なることを示した。

研究成果の概要（英文）：

I studied the group of interval exchange transformations, IET. In a joint work with Guirardel and Dahmani, we proved many new results including that any subgroup in IET that is isomorphic to a Lie group is abelian. This is an unexpected result.

I also studied the Funk metric on Teichmuller space, and obtained a number of interesting results. My study shows that the Funk metric on Teichmuller space is very different from the original Funk metric for a convex domain in a Euclidean space, and opened a new direction of the study on the Funk metric on a space which has negative curvature.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
交付決定額	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：微分幾何、微分トポロジー、群論

1. 研究開始当初の背景

幾何学的群論にまつわる萌芽的な三つの課題に取り組むことを研究の目的とした。具体的には 1. 有限生成無限群の外部自己同型群にフィンスラー幾何の立場から取り組むこと。2. 斎藤恭司氏によるリミットエレメントについて研究すること。3. 区分交換群である。研究開始当初の背景について以下でそれぞれ述べる。

課題1については、いくつかのアプローチが

知られていた。フィンスラー幾何の観点ではタイヒミュラー距離に関する研究成果がある。課題2については、斎藤恭司氏が一連の研究の中でリミットエレメントを定義し研究したが、ほかの関連研究はほとんどなかった。斎藤氏自身も論文の中で指摘しているが、双曲群の理論、オートマチック群の理論との関連があるように見て取れていた。この方向では、E p s t e i n がその共同研究者と群にまつわるある種の級数の有理性についてよい結果を得ていた。課題3については、個

別の区間交換写像については、多くの研究があるが、それらすべてが写像の合成に関してなす群についての研究はほとんどなかった。

2. 研究の目的

研究の目的について、1で述べた三つの課題について、それぞれ述べる。まず、課題1については、曲面の写像類群と自由群の外部自己同系群について調べることが目的とした。特に写像類群については、山田澄夫氏が定義したタイヒミュラー空間上のフンク距離について研究する。

課題2については、まずは斉藤氏の確立した理論を理解し、それを幾何学的群論の手法で理解、検討する。その上で幾つかの問題を解決し、加えて理論に新しい要素を付け加える。

課題3についても、幾何学的群論の立場から取り組む。特に区間交換群の部分群の構造について研究する。

3. 研究の方法

課題1については自由群と曲面群の場合にまず検討するが、特に写像類群を優先する。フンク距離の挙動について、非正曲率空間の研究において有効であった、「ランク1」という概念を使う。それにまつわり、フンク距離に関する最短点射影の振る舞いを調べる。

課題2については、オートマチック群の理論を適用する。特に斉藤氏が提出しているリミットエレメントの有限性について検討する。また代表者とCalegari氏の共同研究で得た双曲群のエルゴード理論に関する知見を応用する。計算機実験によって、いくつかの具体的な群についてリミットエレメントについての知見を得たい。

課題3についても、幾何学的群論の手法を使う。それによって部分群の構造、特に可換群、冪零群、可解群について調べる。計算機実験を行う。特に2元で生成される部分群について調べる。

4. 研究成果

課題1については写像類群、すなわち曲面群の外部自己同型群について良い結果を得た。具体的にはタイヒミュラー空間上のFunk距離について写像類群にまつわる新しい知見を得て、論文(3)として発表した。これは今後フィンスラー幾何での成果を出すことにつながる。この論文では擬アノソフ写像の軸(不変な測地線)の上でフンク距離がどのように振舞うかについて、大域的によい

評価を得た。そこでは、代表者とBestvinaの以前の共同研究での知見が役に立った。さらに、この成果と手法は、これらが空間の負曲率性によるものであることを強く示唆していて、今後の研究の指針を立てる上で有意義である。また、ここで扱ったフンク距離と類似の距離について適用できる部分があり、今後の研究につながる。

より詳しく述べると、フンク距離は古典的にはユークリッド平面の凸な図形に対して定義されるものであるが、山田澄夫氏が、その定義のタイヒミュラー空間への自然な拡張を得た。本研究では、その距離の基本的な性質について調べ、タイヒミュラー空間のフンク距離が、ユークリッド空間の場合と著しくことなることを示した。たとえば、タイヒミュラー空間に作用する群として写像類群があるが、写像類群の作用はフンク距離を保つことは、定義から直ちに分かる。写像類群の擬アノソフ写像は不変な測地線を持つが、本研究では、その測地線上でのフンク距離の振る舞いの大域的な性質を得るために、リーマン幾何において知られていた幾つかの手法を適用した。

課題2について述べる。斉藤恭司氏は有限生成群のポアンカレ級数について独自の観点から研究し、リミットエレメントという概念を得ている。本研究では、それについて、主にオートマチック群の手法を使って研究し、代表者が以前行ったカルガリ氏との共同研究との関連を見出した。これは双曲群において斉藤氏の理論を適用する上で重要な知見になると思われる。

より詳しく述べる。エルゴード理論と解析的組み合わせ論との関連を見出した。これは双曲群とオートマチック群の成果の上に成り立つ、微妙な結果で大変興味深い。その視点に立つと、グラフの自己同型の双曲性がカギになることが分かった。これは今後の成果につながる見込みである。一方、計算機実験は期間中に出来なかった。ここまでに得た理論的成果から、計算機実験を行うべき対象は絞られたので、今後それを実行し、理論と合わせてよい成果を導ける可能性がある。

課題3について述べる。単位区間を有限個の区間に分割して、その順序を入れ替えて再び単位区間にする写像を、「区分交換写像」と呼ぶ。正確には、各区間の左側は閉じていて右側は開いているものだけを考える。区分交換写像は基本的な研究対象であり、いままでに多くの研究がある。区分交換写像の全体が写像の合成に関してなす群をIETと記す。

ギラデルとダマニとの共同研究で、IETについて多くの新しい結果を得た。この研究の新しい視点は、区分交換写像全体がなす群構造を研究対象にしたことである。従来は、一つ一つに写像についての研究がほとんどであった。IETに関しては基本的な問題で未解決なものも多く、たとえばこの群が自由群を部分群として含むかは知られていない。この問題に関連して、共同研究ではIETの部分群でリー群と同型なものは可換であることを示した。その証明のために、各区分交換群に対して、「ミニマルモデル」という自然な幾何学的対象物を定義した。

この成果はIETに関する専門家の予見を覆すもので、国際的に高く評価された。論文は投稿中である。この結果を得るためには計算機による実験を多用した。そこで得た知見を理論的に検討し、それに加えてリー群に関するいくつかの既知の定理を組み合わせることで結論を得た。この結果は、今後の研究のいくつかの方向性を示唆していて、いくつか別の研究も誘発している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

(1) Koji Fujiwara, Tetsu Toyoda, Random groups have fixed points on CAT(0) cube complexes, Proc. Amer. Math. Soc. 140, Number 3, (2012), 1023-1031. 査読あり

(2) K. Fujiwara, Geometry of the Funk metric on Weil-Petersson spaces, Math. Zeit. .Nov 2012, DOI: 10.1007/s00209-012-1089-6 査読あり

(3) Koji Fujiwara, Jason Fox Manning. Simplicial volume and fillings of hyperbolic manifolds. Algebraic & Geometric Topology. 11 (2011) 2237-2264. 査読あり

[学会発表] (計 21 件)

(1) 2013.3.15. Quasi-morphisms and its application. Kervaire Seminar "Geometry of groups 2013" 10 - 15 March 2013. Les Diablerets, Switzerland

(2) 2013.2.14. Group actions on quasi-trees and its application I, II. "semester program on Teichmueler Theory", Erwin Schroeinger International Institute for Mathematical Physics, Vienna, Austria.

(3) 2012.12.12. Quasi-homomorphisms. "Doctoral Forum of Mathematics between Fudan and Kyoto Universities". Kyoto.

(4) 2012.11.29. Group actions on quasi-trees. "Cohomological methods in Geometric group theory". Banff International Research Station, Banff, Canada.

(5) 2012.10.25. Negative curvature in discrete groups, 第18回複素幾何シンポジウム、菅平

(6) 2012.9.27. Stable commutator length on mapping class groups. Oberseminar, MPI Bonn, Germany.

(7) 2012.8.29. Group actions on quasi-trees. Discrete Geometric Analysis, RIMS, Kyoto.

(8) 2012.8.13-15. Group actions on quasi-trees (3 lectures). The 10th KAIST Geometric Topology Fair, Korea.

(9) 2012.8.2. Quasi-cocycles on free groups to uniformly convex Banach spaces, "Geometric and combinatorial group theory with applications (GAGTA-6)", Dusseldorf, Germany,

(10) 2012.7.16. Quasi-cocycles on free groups to uniformly convex Banach spaces, "Symplectic geometry, geometric group theory and dynamics", Obervolfach, Germany.

(11) 2012.5.28. Quasi-cocycles on free groups to uniformly convex Banach spaces, "Conference on Geometry", RIMS, Kyoto.

(12) 2012.5.23. Quasi-trees and quasi-cocycles. "Topology and functional analysis", Fudan University, Shanghai, China.

(13) 2012.5.17. Growth of groups, Intelligence of Low-dimensional Topology, RIMS, Kyoto.

(14) 2012.4.24. Quasi-cocycles on free groups to uniform convex Banach spaces. Mittag-Leffler Institut, Sweden.

(15) 2012.3.17-20. Group actions on quasi-trees. Rigidity School. Univ Tokyo.

(16) 2011.9.17. Simplicial volume and fillings of hyperbolic manifolds, Topics in Topology, Max Planck Institute, Bonn, Germany.

(17) 2011.7.8. Group actions on quasi-trees and quasi-cocycles. "Geometric and measured group theory", Institut Henri Poincare, Paris, France.

(18) 2011.6.27. Simplicial volume and fillings of hyperbolic manifolds. "Dubrovnik VII -- Geometric Topology". Dubrovnik, Croatia.

(19) 2011.6.22. Subgroups of interval exchange transformations. "Geometric Group Theory" Technion, Haifa, Israel.

(20) 2011.5.13. Subgroups of interval exchange transformations. Théorie Géométrique des Groupes, U Paris Sud (Orsay).

(21) 2011.4.12. Quasi-homomorphisms on groups and rank-rigidity, Bonner Geometrietage (Ballmann's 60th birthday conference). MPI in Bonn.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤原耕二 (FUJIWARA KOJI)
京都大学・理学研究科・教授
研究者番号：60229078

(2) 研究分担者 なし
()

研究者番号：

(3) 連携研究者 なし
()

研究者番号：