

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 9 日現在

機関番号：12601

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2013

課題番号：23654022

研究課題名(和文)幾何学の可視化と3次元実体模型の作成

研究課題名(英文)Visualization in geometry and construction of 3-dimensional mathematical models

研究代表者

河野 俊丈 (Kohno, Toshitake)

東京大学・数理(科)学研究科(研究院)・教授

研究者番号：80144111

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円、(間接経費) 840,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の幾何学的対象は、代数方程式、複素解析関数、微分方程式など、さまざまなかたちで与えられる。曲面の離散データからガウス曲率、平均曲率など微分幾何学的な不変量の、よい近似値を計算する手法を考察した。実際の幾何学模型の制作にあたっては、曲面の法線方向のデータを各点に加味することが有効であることが分かったので、このような手法を技術的に確立することを研究した。三次曲面上の27本の直線、負の定曲率曲面など、離散データを経由してアルミニウム製の精度の高い3次元の実体模型を制作した。離散データから模型制作までのインタフェースを構築するためのステップについて、一定の成果を得る事ができた。

研究成果の概要(英文)：Geometric objects of present research are given in various forms such as algebraic equations, complex analytic functions and differential equations. Starting from discrete data of surfaces we investigated a method to compute optimal values of invariants in differential geometry such as Gauss curvature and mean curvature. In the process of constructing geometric models it turns out that it is efficient to include information about normal direction at each point and we established techniques to construct models based on such enhanced data. We succeeded in constructing models of 27 lines on a cubic surface and a surface of constant negative curvature made of aluminum with high accuracy. We obtained a satisfactory procedure to establish an interface for constructing models from discrete data.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：離散データ 代数曲面 定曲率曲面 ガウス曲率 平均曲率 三次曲面 極小曲面 複素解析関数

1. 研究開始当初の背景

さまざまな幾何学的対象について、離散データから出発して、実体模型を制作することは、近年 3D プリンターの普及などによって、一般的に行なわれるようになった。しかしながら、より精度の高い模型を制作するためには、金属を削る工法を採用するためには、離散データの扱いについて、さらに基礎的な研究をすすめる必要がある。また、離散データから、曲率などの幾何学的不変量を抽出することも重要な課題である。

2. 研究の目的

本研究の幾何学的対象は、代数方程式、超越関数によるパラメーター表示、複素解析関数、微分方程式など、さまざまなかたちで与えられる。このようなインプットから、実際に幾何学模型を制作するためには、幾何学的対象を離散データ化して、工学で用いられる適切なファイル形式に変換する必要がある。まず、幾何学的な対象から、どのようにして適切に離散データを抽出できるかについて研究した。工学で用いられるファイル形式には STL ファイルなどがあり、3D プリンターなどでも広く用いられている。本研究では、アルミニウムなど金属を削ることにより、3D プリンターなどよりも精度の高い幾何学模型の制作をめざし、このような目的に適した離散データの扱いについての基礎研究を行なうことを目的とした。

3. 研究の方法

また曲面の離散データからガウス曲率、平均曲率など微分幾何学的な不変量の、よい近似値を計算する手法を考察し、このような不変量の計算の手法についての成果を得た。実際の幾何学模型の制作にあたっては、曲面の座標を表す離散データのみならず、曲面の法線方向のデータを各点に加味することが、金属を削る行程において有効であることに基づき、このような手法を技術的に確立することを研究した。

4. 研究成果

数理科学研究科では、19 世紀末から 20 世紀はじめにかけてドイツで制作された石膏の幾何学模型を所蔵しているが、これらの模型について、数式から離散データを作成して、アルミニウムなどの素材によって、実際に模型を制作するための基礎的な手法を確立した。これを用いて、負の定曲率曲面をヤマダ精機と共同で制作し、数理科学研究科に展示した。下の写真が、この本研究によって制作された負の定曲率曲面の模型である。

クレブッシュ面とよばれる 3 次曲面の模型であり、4 次元実射影空間の斉次座標を用いて 1 次と 3 次の斉次式で定義される。これは 3 つの穴のあいた種数 3 の曲面である。この曲面の特徴は、ちょうど 27 本の直線が曲面上にのっていることである。

クレブッシュ曲面について、代数方程式の解から離散データを抽出して、やはり、ヤマダ精機と共同で、アルミニウム製の模型を制作した。クレブッシュ曲面上には 27 本の直線が存在することが知られているが、本研究では、この 27 本の直線の配置を詳しく調べ、アルミニウム製の三次曲面の模型によって、加工によって 27 本の直線を表示することに成功した。この加工をほどこした模型が下の写真に示した模型である。



負の定曲率曲面と三次曲面の模型

また、このような実体模型の制作のための基礎技術の研究に加えて、離散幾何学、離散群論についての研究を行ない、特に組みひも群、写像類群の表現についての成果、および多様体の微分同相群の交換子群についての結果を得た。とくに、組みひも群の量子表現とホモロジー表現の関係についての新しい関係を見いだすことができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

① L. Funar, T. Kohno,

On Bura representations at roots of unity, *Geometriae Dedicata*: Volume 169, Issue 1 (2014), 145-163.

② T. Kohno, A. Pajitnov, Novikov homology, jump loci and Massey products,

Cent. Eur. J. Math. 12(9), (2014), 1285-1304,

DOI: 10.2478/s11533-014-0413-2

③ T. Kohno, A. Pajitnov, Circle-valued Morse theory for complex hyperplane arrangements,

Forum Mathematicum (2013), Published on line DOI 10.1515/forum-2013-0032.

④ T. Tsuboi,

Homeomorphism groups of commutator width one,

Proceedings Amer. Math. Soc.

141, (2013) 1839-1847.

DOI: 10.1090/S0002-9939-2012-11595-3

⑤ T. Kohno, Homological representations of braid groups and KZ connections, *Journal of Singularities*, 5, (2012), 94--108.

⑥ T. Kohno, Quantum and homological representations of braid groups, *Edizioni della Normale* (2012), 355--372.

⑦ T. Kohno, Hyperplane arrangements, local system homology and iterated integrals, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 62, (2012), 157--174.

⑧ T. Kohno, Hyperplane arrangements, local system homology and iterated integrals, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 62, (2012), 157--174.

⑨ T. Tsuboi,
On the uniform perfectness of the groups of diffeomorphisms of even-dimensional manifolds,
Commentarii Mathematici Helvetici, 87, (2012) 141--185.

DOI: 10.4171/CMH/251

⑩ L. Funar, T. Kohno, Free subgroups within the images of quantum representations, *Forum Mathematicum* (2011), Published on line DOI 10.1515/FORM.2011.162.

[学会発表] (計 17 件)

① T. Kohno, Conformal block bundles and Gauss-Manin connections},
第 9 回代数・解析・幾何学セミナー, 鹿児島大学,
February 17 -- February 20, 2014.

② T. Kohno, Discriminantal arrangements and fusion rules in WZW model},
Hyperplane arrangements and characteristic classes,
RIMS,
Kyoto University,
November 11 -- November 15, 2013.

③ T. Kohno, Braids, quantum symmetry and hypergeometric integrals,
日本数学会秋季総合分科会, 特別講演,
愛媛大学,
September 24 -- September 27, 2013.

④ T. Kohno, Geometric representation theory of braid

groups related quantum groups and hypergeometric integrals,
Geometry and Dynamics,
The University of Tokyo,
September 15 -- September 16, 2013.

⑤ T. Tsuboi, Several problems on groups of diffeomorphisms,
Geometry and Foliations 2013
Komaba, Tokyo, September 11, 2013.

⑥ T. Kohno, Monodromy groups of conformal field theory,
The 6th Pacific RIM Conference on Mathematics,
Session in Mathematical Physics,
Sapporo,
July 1 -- July 5, 2013.

⑦ T. Kohno, Quantum symmetries in homological representations of braid groups and hypergeometric integrals,
The 6th Pacific RIM Conference on Mathematics,
plenary talk,
Sapporo,
July 1 -- July 5, 2013.

⑧ T. Kohno, Quantum symmetries in homological representations of braid groups and applications,
Joint International Meeting of American Mathematical Society and Romanian Mathematical Society,
Alba-Iulia, Romania,
June 27 -- July 1, 2013.

⑨ T. Kohno, Quantum symmetries in homological representations of braid groups, "Quantization of Teichmüller spaces",
Erwin Schrodinger Institute, Vienna,
April 15 -- 19, 2013.

⑩ T. Kohno, Homological representations of braid groups and KZ connections,
"Braid groups and configuration spaces",
6th European Congress of Mathematics,
Krakow, Poland,
July 2 -- 6, 2012.

⑪ T. Tsuboi, Homeomorphism groups of commutator width one,
Geometry in Dynamics - Satellite Thematic Session,
6th European Congress of Mathematics,
Krakow, July 1, 2012

⑫ T. Kohno, Quantum symmetries in homological representations of braid groups and

applications,
Geometric Group Theory,
RIMS Kyoto University,
June 4 -- 8, 2012.

⑬ T. Kohno,

Quantum and homological representations of
braid groups},

Low Dimensional Topology and Number Theory
IV,

Kyushu University,

March 12 -- 15, 2012.

⑭ T. Kohno,

Quantum and homological representations of
braid groups},

East Asian School of Knots and Links, KAIST,
Daejeon,

January 9 -- 12, 2012.

⑮ T. Tsuboi,

Homeomorphism groups of
commutator width one,

Poster at Geometry and Dynamics, Todai
Forum,

Ecole Normale Supérieure de Lyon,

2011年10月17日.

⑯ T. Kohno,

Morse-Novikov theory for hyperplane
arrangements,

"Hyperplane arrangements and applications",

PIMS, University of British Columbia,

August 8 -- 12, 2011.

⑰ T. Kohno,

Monodromy groups of conformal field theory,

"Singularity theory and its applications",

Chinese University of Science and Technology,
Hefei,

July 25 -- 31, 2011.

〔図書〕 (計 0 件)

〔産業財産権〕

○出願状況 (計 0 件)

名称 :

発明者 :

権利者 :

種類 :

番号 :

出願年月日 :

国内外の別 :

○取得状況 (計 0 件)

名称 :

発明者 :

権利者 :

種類 :

番号 :

取得年月日 :

国内外の別 :

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kohno/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

河野 俊丈 (KOHNO, Toshitake)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号 : 8 0 1 4 4 1 1 1

(2) 研究分担者

()

研究者番号 :

(3) 連携研究者

坪井 俊 (TSUBOI, Takashi)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号 : 4 0 1 1 4 5 6 6

阿原 一志 (AHARA Kazushi)

明治大学理工学部 准教授

研究者番号 : 8 0 2 4 7 1 4 1