

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 19 日現在

機関番号：24402

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2013

課題番号：23654027

研究課題名(和文)カンドルの一般化とその応用

研究課題名(英文)Generalization of quandles and their applications

研究代表者

鎌田 聖一 (KAMADA, SEIICHI)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：60254380

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,900,000円、(間接経費) 570,000円

研究成果の概要(和文)：カンドルの概念を一般化するバイカンドルと対称カンドルについて研究を行った。バイカンドルの定義の見直しを行い、幾何的により自然な形の公理を導き出した。バイカンドル上に仮想結び目とねじれ仮想結び目に対応する2種類の構造を導入し、与えられたカンドルから新たにバイカンドルを構成する方法も与えた。簡単に効率的にバイカンドルを構成することができる。対称カンドルの表示法に関する研究を行い、高次元の多様体結び目の基本対称カンドルの表示をダイアグラムから求める方法を得た。

研究成果の概要(英文)：As generalizations of a quandle, we studied biquandles and symmetric quandles. The notion of a biquandle was re-defined by a system of axioms, and two additional structures, called T-structure and V-structure, were introduced. These structures are related to virtual knots and twisted virtual knots. We also gave a method of constructing a biquandle from a given quandle. By the method, one can easily and effectively construct many biquandles. Presentation of a symmetric quandle was studied, and a method of obtaining a presentation of the fundamental symmetric quandle of a manifold knot was introduced.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：トポロジー カンドル 結び目 バイカンドル 対称カンドル 高次元結び目 仮想結び目

1. 研究開始当初の背景

カンドル (quandle) は、代数や幾何の様々な対象 (Artin 群、ルート系、ブレイド群、結び目、対称変換など) を扱う際に自然に現れている。1982 年に D. Joyce と S. Matveev がカンドルの演算公理を、結び目理論のライデマイスター変形と対応するように明確に与え、結び目の研究に有効であることを示した。その後、R. Fenn, C. Rourke によるカンドル表示の詳細な研究や、J. S. Carter らによるカンドルのホモロジー理論を用いた結び目不変量が登場し、古典次元の結び目のみでなく、4 次元空間内の曲面の結び目などの研究にも盛んに利用されている。カンドルホモロジーのチェーンを仮想結び目のダイアグラムを用いて表すことができることも知られており、仮想結び目の研究にも利用でき

る。研究代表者は、カンドルに「対称構造」の概念を導入し、対称構造を込めた基本カンドル (結び目の基本対称カンドル) を定義し、対称カンドルの鎖複体とそのホモロジー群を使って結び目の不変量を構成していた。

2. 研究の目的

カンドルは、ある公理系を満たす 2 項演算をもつ集合であり、代数や幾何における具体的な現象の中で重要な役割を担っている。R. Fenn, C. Rourke によりカンドルの生成元と関係式による表示法が確立された。当研究代表者は J. S. Carter, M. Saito らと共にカンドルホモロジー論を導入し、その応用として結び目や 4 次元空間内の曲面がつくる結び目 (曲面結び目) の state sum 不変量を構成した。本研究ではカンドルで構築された理論を「バイカンドル」および「対称カンドル」などに一般化することを目指す。

3. 研究の方法

バイカンドルや対称カンドルのようにカンドルの上位構造と付加構造に焦点を置いて、カンドルとそれに関する理論を一般化する。

カンドルの 3 つの公理は結び目ダイアグラムの 3 つの基本変形 (ライデマイスター変形) に対応している。仮想結び目は、結び目のダイアグラムに仮想交点という新たな情報を持つ交差を許したもので、カンドルやその一般化であるバイカンドルを研究する上でとても重要な対象である。さらに近年、仮想結び目のダイアグラムにバーと呼ばれる線分を追加したねじれ仮想結び目の概念が登場した。ねじれ仮想結び目は向き付け不可能な曲面上の結び目ダイアグラムの安定同値類に対応する概念である。これらの幾何的な対象を用いることで、逆にカンドル・バイカンドルの付加構造の研究を行う。

バイカンドルを拡張する形で「仮想バイカ

ンドル」を定義する。仮想交点に対応する 2 つの演算をライデマイスター変形をモデルにして新たに導入する。これによってバイカンドルを拡張する形で「仮想バイカンドル」を定義する。

仮想結び目は曲面上のバンドル内の結び目に対応している。そのため向き付け不可能な曲面上のバンドル内の結び目をういて、「ねじれバイカンドル」にカンドルの概念を拡張する。

向き付け不可能な曲面結び目や高次元の多様体がなす結び目の対称カンドルを扱うために、生成元と関係式による表示法を構築する。

4. 研究成果

当研究では、次の 3 つについて成果が得られた。

- (1) バイカンドルの定義の見直し
- (2) バイカンドル上の新しい構造
- (3) 対称カンドルの表示法

(1) バイカンドルの定義の見直しを行い、結び目及び仮想結び目の交差に対応する幾何的により自然な形の公理を導き出した。これまでバイカンドルを定義する方法はいくつか知られているが、それらの間の関係を明瞭に示した文献はあまりなく、今回それに関係する補題をいくつか構成したので、今後のバイカンドルの研究で有用となる。我々のバイカンドルの定義 (公理) は、バイカンドル上に新たな構造を導入する際にも利用しやすい。

(2) 仮想結び目の仮想交点に対応するバイカンドル上の構造 (V 構造) とねじれ仮想結び目のバーに対応する構造 (T 構造) を導入した。仮想結び目が向き付け可能な曲面上で展開される結び目理論であるのに対して、ねじれ仮想結び目は、向き付け不可能な曲面も許した一般の曲面における結び目理論である。(曲面の裏返しを表す記号がバーである。) ねじれ仮想結び目の基本変形をうまく選び出すことによって、V 構造を伴ったバイカンドルの上に構成された高次の構造が T 構造である。さらに、与えられたカンドルから新たにバイカンドルを構成する方法を与えた。その特別なケースである「標準積構成法」は、簡単で効率的にバイカンドルを構成することができる。また、この方法は (ある都合のいい写像を見つけることで) V 構造と T 構造も同時に生成できる特徴がある。これによって、今後仮想結び目やねじれ仮想結び目の研究にバイカンドルを利用しやすくなる。

(3) 生成元と関係式による対称カンドルの表示法に関する研究を行った。多様体結び目 (ユークリッド空間内の向き付け可能性を仮定しない余次元 2 の部分多様体) に対して、ダイアグラムからその基本対称カンドルの

表示を求める方法が得られた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

(1) Naoko Kamada and Seiichi Kamada, Biquandles with structures related to virtual links and twisted links, *J. Knot Theory Ramifications* 21 (2012), no. 13, 1240006, 14 pp., 査読有り, DOI: 10.1142/S0218216512400068

(2) 鎌田聖一, quandle と結び目理論, *数学* 64 (2012), no. 3, 304—324, 査読有り

(3) J. Scott Cater and Seiichi Kamada, Braids and branched coverings of dimension three, *数理解析研究所講究録*, No. 1812 (2012), 64—81, 17 pp., 査読有り

(4) N. Kamada, Polynomial invariants and quandles of twisted links, *Topology and its Application*, 159 (2012), no. 4, 999—1006, 査読有り, DOI: 10.1016/j.topol.2011.11.024

(5) Mikami Hirasawa, Naoko Kamada and Seiichi Kamada, Bridge presentations of virtual knots, *J. Knot Theory Ramifications* 20 (2011), no. 6, 881—893, 査読有り, DOI: 10.1142/S0218216511009017

[学会発表](計18件)

(1) Seiichi Kamada, Chart description of surface braids, Advanced School and Discussion Meeting, *Knot Theory and Its Applications*, 2013年12月12日, IISER Mohali, Punjab, インド

(2) Seiichi Kamada, A chart description of simple or regular surface braids, 国際研究集会「the Lloyd Roeling UL Lafayette Mathematics Conference」, 2013年11月8日, University of Louisiana at Lafayette, ルイジアナ, 米国

(3) Seiichi Kamada, Charts for 3-dimensional braids, アメリカ数学会, 特別セッション「Algebraic Structures in Knot Theory III」, 2013年11月3日, University of California at Riverside, カリフォルニア, 米国

(4) Seiichi Kamada, Two and three

dimensional braids and their descriptions, 位相数学・微分幾何学国際会議兼第6回日本メキシコ位相数学合同シンポジウム, 2013年9月2日, 島根大学

(5) 鎌田聖一, 2次元ブレイドとチャート表示, 第60回トポロジーシンポジウム, 2013年8月6日, 大阪市立大学

(6) Seiichi Kamada, Low dimensional braids and chart descriptions, TAPU Winter Seminar, 2013年2月4日, Kyungpook National University (慶北国立大学), テグ, 韓国

(7) Seiichi Kamada, Three dimensional braids and their braid monodromies, 国際研究集会「The Ninth East Asian School of Knots and Related Topics」, 2013年1月16日, 東京大学

(8) 鎌田聖一, 非単純2次元ブレイドのチャート表示について, 研究集会「Hurwitz action とその周辺」, 2013年1月5日, 群馬大学

(9) Seiichi Kamada, Branched coverings and braided manifolds of low dimensions, 国際研究集会「Knots in Washington XXXV」, 2012年12月9日, George Washington University, Washington DC, 米国

(10) 鎌田聖一, 結び目のカンドル彩色, 研究集会「2012 琉球結び目セミナー」, 2012年9月4日, 那覇市ぶんかテンプス館

(11) Seiichi Kamada, Presentations of racks, quandles and symmetric quandles, 研究集会「TAPU Summer School on Quandle Theory」, 2012年7月24日, Pusan National University (釜山国立大学), 釜山, 韓国

(12) Seiichi Kamada, Graphical description of branched coverings and 2-dimensional braids, The 6th European Congress of Mathematics, 2012年7月6日, Jagiellonian University, Krakow, Poland

(13) Seiichi Kamada, Braids and branched coverings of dimension three, 研究集会「Intelligence of Low-dimensional Topology」, 2012年5月18日, 京都大学

(14) Seiichi Kamada, Twisted biquandles and invariants of twisted links, 国際研究集会「The Eighth East Asian School of Knots and Related Topics」, 2012年1月10日, KAIST, 大田, 韓国

(15) Seiichi Kamada, Virtual knots as double covering of twisted knots, 国際研究集会「The 19th TAPU Seminar on Knots and Related Topics」, 2011年9月16日, Seacloud Hotel, 釜山, 韓国

(16) Seiichi Kamada, Biquandles with structures related to virtual links and twisted links, 国際研究集会「The 19th TAPU Seminar on Knots and Related Topics」, 2011年9月15日, Seacloud Hotel, 釜山, 韓国

(17) Seiichi Kamada, カンドルとその一般化について, 研究集会「2011 琉球結び目セミナー」, 2011年9月6日, 那覇市伝統工芸館

(18) Seiichi Kamada, Monodromy representations and their graphical descriptions, 国際研究集会「Workshop on Low Dimensional Topology in Shanghai and Suzhou」, 2011年5月17日, Suzhou University (蘇州大学), 上海, 中国

〔図書〕(計1件)

(1) 鎌田 聖一, 丸善出版株式会社, 曲面結び目理論, 2012年, 247ページ

6. 研究組織

(1) 研究代表者

鎌田 聖一 (KAMADA SEIICHI)
大阪市立大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 60254380

(3) 連携研究者

佐伯 修 (SAEKI OSAMU)
九州大学・マス・フォア・インダストリ
研究所・教授
研究者番号: 30201510

大槻 知忠 (OHTSUKI TOMOTADA)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号: 50223871

鎌田 直子 (KAMADA NAOKO)
名古屋市立大学・システム自然科学研究
科・教授
研究者番号: 60419687