

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 23 日現在

機関番号：13901

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2013

課題番号：23654031

研究課題名(和文) 球面デザインにおける統計的最適配置と物理的最適配置の双対構造と構成法

研究課題名(英文) Duality of statistical optimality and physical optimality for spherical designs and their constructions

研究代表者

神保 雅一 (Jimbo, Masakazu)

名古屋大学・情報科学研究科・教授

研究者番号：50103049

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円、(間接経費) 810,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、球面上の関数を多項式で近似して積分する際に、被積分多項式が2次以下のときに、2つの同心球面上で、 $p$ -最適となる球面デザインの満たすべき点配置について、球面の半径比と各球面上の点配置を明らかにした。本研究結果は、2012年7月のism-APRMをはじめとして様々な国際会議などで発表し、国際的な統計雑誌Sankhyaをはじめとするさまざまな国際誌に掲載された。また、 $t$ -mutually orthogonal  $t$ -designs ( $t$ -MOD)という複素数体上のデザインの族を導入し最適 $t$ -MODの球面デザインとしての性質および量子ジャンプ符号との同値性を見出した。

研究成果の概要(英文)：When we integrate some polynomial function on a  $n$ -dimensional sphere, if the integrand polynomial is at most degree 2, we clarified the condition on an optimal Euclidean design with two concentric spheres. Conditions on an optimal Euclidean design is given by (i) the ratio the radius of two spheres, (ii) the number of points chosen from each sphere and (iii) the configuration of points for each concentric sphere. We obtained such conditions that a cubature formula is optimal and gave constructions of Euclidean designs which satisfy the conditions. These results were accepted as papers for Sankhya Indian Journal of Statistics, etc.

Moreover, we introduced a notion of mutually orthogonal  $t$ -designs ( $t$ -MOD) over the complex number field. We examined some conditions for a  $t$ -MOD to be optimal. And we find that  $t$ -MOD is equivalent to a quantum jump code.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計科学)

キーワード：球面デザイン 組合せデザイン

### 1. 研究開始当初の背景

求積公式 (Cubature formula, 以下 CF と称する) は、多変数関数の積分値を近似的に求めるために多次元空間から有限個の点を選び、それらの点における関数値の重みつき平均値によって所望の積分値を近似する公式である。少ない近似点からなる CF を具体的に構成する問題は様々な分野に応用できる基本的な問題である。この問題は、1 変数や 2 変数の場合は、古くから調べられてきたが、3 変数以上の場合においては、まだ十分に研究が進展している状況とは言えない。代数的組合せ論の分野でも球面デザイン (spherical design) の名で同様の研究が独立になされており、両分野で、これまで独自の発展を遂げてきた球面点配置の研究は、ここ数年、互いの研究交流が始まって発展を遂げてきた。

一方、実験計画法の分野では、rotatable design と呼ばれる研究分野が古くからあり、反応曲面が多項式であり、それに誤差が加わって観測値が得られるとき、観測値の数  $N$  が与えられた場合に多項式の係数を精度良く推定するために観測点をどのように配置すればよいか問題となる。しかし、 $n$  次元の球面上の rotatable design は古くから指摘されている問題であるにも関わらず、あまり研究が進んでおらず、上記の求積公式、代数的組合せ論の分野の研究者との交流もさほど行われていない。求積公式のモデルには、誤差が含まれていないが、誤差を導入した確率モデルは、実用上有用であり、その上で、積分値の推定誤差あるいは多項式の係数の推定誤差を小さくするという意味で“最適な”球面デザインを見出す研究は理論的にも応用上も興味深い。

球面デザインの点配置の最適性をはかるもう一つの尺度が物理的な観点から得られており、球面状にプラスの電荷をもつ  $n$  個の粒子を配置した際に、互いの反発力 (クーロン力) によるエネルギーを 2 つの粒子の距離の (2 乗の) 関数として、エネルギーの総和が最小となる点配置を最適球面デザインと呼んでいる。

上記の物理的観点からのエネルギーの最小化と統計的観点からの推定値の分散の最小化問題には、符号の最小距離と直交配列の強さの関係と同様の双対性をもつ数理構造が内在していると思われる。

これらの関係についての研究は、まだなされていないと思われる萌芽的研究である。

### 2. 研究の目的

本研究では、誤差を導入した球面上の反応曲面のモデルを対象として、(1) 2 つの最適化問題の双対構造に焦点を当てて、双対性を明らかにするとともに、(2) 双方の観点から球面デザインの点の数に関する下限界式の改良を試みたい。また、(3) 与えられた点の数に対して、最適な点配置の構造を明ら

かにし、そのような点配置を一般的に構成する手法を見出したい。

本研究の進展により、モデルに誤差が含まれる場合の球面上の反応曲面の最適な推定値を求め、さらに、それにより数値積分の計算精度を高めるような点配置を構成することにより、実際の統計解析や数値計算に有用な成果が得られると期待される。

### 3. 研究の方法

本研究は研究代表者と分担者澤、間瀬の 3 名に 2 名程度の大学院生を加えて実施した。H23 年度は、(1) まず、 $n$  次元球面上の点配置の統計的最適性と数値積分における求積公式の関係を明らかにし、被積分関数が 2 次以下の多項式の場合に 2 つの同心球面からなる最適ユークリディアンデザインにおける最適な半径比および、各球面上の点の数、さらに各球面上での最適な点配置を求めた。この研究は、H24、25 年度も継続して行われた。また、球面上の被積分関数に誤差が含まれる場合に、球面上の Markov random field モデルを構築し、そのモデルのもとでの球面積分の推定値の最適性基準を与え、その基準のもとで、最適球面デザインを構成する組合せ論的あるいは代数的構成法を与える試みを行った。

H24、5 年度は、複素球面上での最適点配置の問題にも触れ、 $t$ -デザインあるいはそれらの族の概念を複素球面上に拡張し、 $t$ -mutually orthogonal designs ( $t$ -MOD) という概念を導入した。本概念は、物理的最適配置の複素球面上へのある種の拡張と見なせると思われる。この概念を満たす最適配置の構成問題および、その物理的最適性と実験計画における最適配置の関連について研究を行った。

### 4. 研究成果

本研究では、下記の研究成果を得た。

(1) 球面上の関数を多項式で近似して積分する際に、被積分多項式の次数がある値以下の場合に、実際に球面上で積分する代わりに、有限個の観測点の関数値の重み付和として積分を表現することができることが知られている。また、被積分関数が回転不変な性質を持つ場合に、 $n$  次元空間全体で積分する代わりに、複数個の同心球面上の観測点での関数値の重み付和として積分を表現することも知られている。

本研究では、ユークリディアンデザインの統計的最適性に注目し、被積分多項式が 2 次以下のときに、2 つの同心球面上で、 $p$ -最適となる球面デザインの満たすべき点配置について、球面の半径比と、最適配置の場合の各球面上の点の数、およびその点の数を持つ最適な点配置を明らかにした。本研究成果は、2012 年 7 月の ism-APRM をはじめとして様々な国際会議、国内学会、研究集会で発表し、国際的な統計雑誌 Sankhya The Indian

Journal of Statistics に掲載された .

(2) 複素球面上の球面デザインについても研究を行い, 量子ジャンプ符号と同値な  $t$ -mutually orthogonal  $t$ -designs ( $t$ -MOD) という複素数体上のデザインが, ある意味で最適な時には, それらを複素球面上に配置することにより, それらの点の内積に注目すると, 内積の種類が少ない  $d$ -code 呼ばれる点配置となっている例を見出した. これは, 複素球面上の配置のクーロン力による  $f$ -エネルギーを最小化する組合せ構造と関係があると思われるがその解明には至らなかった. さらに, この問題は完全グラフの因子分解問題の複素数体上への拡張とみなすこともでき, その方向への一般化との関連も見出した. これらの研究成果は現在, 論文として, 取りまとめ中である. なお, 当初の研究計画で物理的観点からの球面上の電荷をもつ点のエネルギー最小化の意味での最適点配置と上記の球面上の求積公式に関する最適点配置の関係の解明には至らなかった. これについては今後の検討課題である.

(3) 球面上のデザインの問題は, 様々な組合せデザインの構造と深く関係しており, 本研究では, 最適構造を持つ組合せデザインおよび組合せ符号についても研究を行い, 重みが 3, 4 の場合の最適な Conflict-avoiding code の構成法を広い範囲の符号長に対して与えた.

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

{ 雑誌論文 } (計 17 件)

[1] Masatake Hirao, Masanori Sawa, Masakazu Jimbo, Constructions of  $\Phi_p$ -optimal rotatable designs on the ball. Sankhya - The Indian Journal of Statistics, 印刷中, 2014, 査読有 .

[2] Yiling Lin and Masakazu Jimbo, Extremal properties of  $t$ -SEEDs and recursive constructions. Design, Codes and Cryptography, 印刷中, 2014, DOI:10.1007/s10623-013-9829-0, 査読有 .

[3] Yiling Lin, Miwako Mishima, Junya Satoh and Masakazu Jimbo, Optimal equi-difference conflict-avoiding codes of odd length and weight three. Finite Fields and Their Applications, Vol. 26, pp. 49-68, 査読有 .

[4] Masanori Sawa, Yuan Xu, On positive cubature rules on the simplex and isometric embeddings. Mathematics of Computation, Vol.83

no.287, pp.1251-1277, 査読有 .

[5] Hiroshi Nozaki, Masanori Sawa, Remarks on Hilbert identities, isometric embeddings, and invariant cubature. St. Petersburg Mathematical Journal, 印刷中, 2014, 査読有 .

[6] Masatake Hirao, Masanori Sawa, Masakazu Jimbo, Constructions of  $\Phi_p$ -optimal rotatable designs on the ball. Sankhya Series A, 印刷中, 2014, 査読有 .

[7] 澤 正憲, Cubature 公式の理論. 数学, 印刷中, 2014, 査読有 .

[8] S. Mase and Y. Yamaguchi, Estimations of Unconditional Distributions from Data obeying Conditional Dstribution. AMSA'13 Proceedings, pp. 181-188, 査読有.

[9] Koji Momihara, Miwako Mishima, Masakazu Jimbo, A decomposition of the 2-design formed by the planes in  $AG(2n; 3)$ . Finite Field and Their Applications, Vol.18, pp. 956-970, 査読有 .

[10] 閻瀬茂, 持田信行, 村山靖洋, ブロック行列による正規確率場の逐次シミュレーション法について, 統計数理, 60 巻 1 号, pp. 131 - 148, 査読有 .

[11] N.Esmailzadeh, H. Talebi, K. Momihara, M. Jimbo, A new series of main effects plus one plan for  $2m$  factorial experiments with  $m=4\lambda+1$  and  $2m$  runs. Journal of Statistical Planning and Inference, Vol.141, pp. 1567-1574, 査読有 .

[12] S. Mase, K. Takahashi, N. Mochida, Geostatistical Predictions Based On Block Data. J. Physical Sciences and Applications vol.1, pp. 175-183, 査読有 .

[13] Ei.Bannai, Et.Bannai, M.Hirao, M.Sawa, On the existence of minimum cubature formulas for Gaussian measure on  $R^2$  of degree  $t$  supported by  $t/4 + 1$  concentric circles. Journal of Algebraic Combinatorics, 10.1007/s10801-011-0294-3, 査読有 .

[14] H.Nozaki, M.Sawa, Note on cubature formulae and designs obtained from group orbits. Canadian Journal of Mathematics, 10.4153/CJM-2011-069-5, 査読有 .

[15] T. Kanamori, H. Uehara, M. Jimbo, Pooling design and bias correction in DNA library screening.

Journal of Statistical Theory and Practice, Vol.6, pp. 220-238, 査読有 .

[16] M. Jimbo, Y. Kunihara, R. Laue, M. Sawa, Unifying some known infinite families of combinatorial 3-designs.

Journal of Combinatorial Theory Series A, Vol.118, pp. 1072-1085, 査読有 .

[17] S.Watanabe, K.Ishii, M.Sawa, A q-analogue of the addressing problem of graphs by Graham and Pollak.

SIAM Journal on Discrete Mathematics, 査読有 .

〔学会発表〕(計 40 件)

[1] 林怡伶, 三嶋美和子, 佐藤潤也, 神保雅一, Optimal equi-difference conflict-avoiding codes of odd length and weight three. 離散数学とその応用研究集会, 2013 年 08 月 08 日, 山形市保健センター .

[2] 林怡伶, 神保雅一, A t-spontaneous emission error design and its application to secret sharing scheme, 日本応用数学会 2013 年度年会, 2013 年 09 月 11 日, アクロス福岡.

[3] 林怡伶, 三嶋美和子, 佐藤潤也, 神保雅一, Optimal equi-difference conflict-avoiding codes of odd length and weight three, 日本数学会 2013 年度 秋季総合分科会: 統計分会, 2013 年 09 月 24 日, 愛媛大学.

[4] 林怡伶, 三嶋美和子, 神保雅一, Optimal equi-difference conflict-avoiding codes of weight four, 研究集会『組合せ論とその実験計画法への応用』, 2013 年 11 月 13 日, 熊本県三愛高原ホテル.

[5] 林怡伶, 三嶋美和子, 佐藤潤也, 神保雅一, The multiplicative order of a unit and its application to equi-difference conflict avoiding codes, 第 10 回「代数学と計算」研究集会(AC2013), 2013 年 12 月 18 日, 首都大学.

[6] Yiling Lin, Miwako Mishima, Masakazu Jimbo, Optimal equi-difference conflict-avoiding codes of weight four, The 3rd Taiwan-Japan conference on combinatorics and its applications, 2014 年 03 月 22 日, Chiayi University, Taiwan.

[7] Masakazu Jimbo, Generalized 1-factorizations over  $\mathbb{C}$  and quasi-difference matrices, The 3rd Taiwan-Japan conference on combinatorics and its applications, 2014 年 03 月 21 日, Chiayi University, Taiwan.

[8] 道下幸司, 神保雅一, Combinatorial design の compressed sensing への応用, 研究集会『組合せ論とその実験計画法への応用』, 2013 年 11 月 14 日, 熊本県三愛高原ホテル.

[9] 林怡伶, 三嶋美和子, 佐藤潤也, 神保雅一, Optimal equi-difference conflict-avoiding codes of odd length and weight 3, 日本応用数学会 2013 年度年会: 研究部会 08: 離散システム, 2013 年 09 月 09 日, アクロス福岡.

[10] Yiling Lin, Miwako Mishima, Junya Satoh, Masakazu Jimbo, Optimal equi-difference conflict-avoiding codes of odd length and weight three, The 3rd Taiwan-Japan conference on combinatorics and its applications, 2014 年 03 月 22 日, Chiayi University, Taiwan.

[11] 澤 正憲, エルミート行列の固有値に関するある補題とその応用 1 -- 隣接行列の固有値とグラフ分解, 日本数学会秋季総合分科会 応用数学分科会 2013 年 09 月 24 日 ~ 2013 年 09 月 27 日, 愛媛大学.

[12] 澤 正憲, エルミート行列の固有値に関するある補題とその応用 2 -- Fisher 不等式の証明, 日本数学会秋季総合分科会 統計数学分科会, 2013 年 09 月 24 日 ~ 2013 年 09 月 27 日, 愛媛大学.

[13] 平尾 将剛, 澤 正憲, 神保雅一,  $n$ 次元球体の最適計画の構成について, 日本数学会秋季総合分科会 統計数学分科会, 2013 年 09 月 24 日 ~ 2013 年 09 月 27 日, 愛媛大学.

[14] 澤 正憲, Ellison の誤り -- Waring 問題, 第 10 回「代数学と計算」, 2013 年 12 月 17 日 ~ 2013 年 12 月 19 日, 首都大学.

[15] 平尾 将剛, 澤 正憲, 有限既約鏡映群による最適実験計画の分類について, 第 10 回「代数学と計算」, 2013 年 12 月 17 日 ~ 2013 年 12 月 19 日, 首都大学.

[16] Y. Lin, M. Mishima, J. Sato, M. Jimbo, Tight equi-difference conflict-avoiding codes with odd length and weight 3, RIMS 共同研究『デザイン、符号、グラフおよびその周辺』, 2012 年 07 月 17 日, 京都大学.

- [17] M. Jimbo, K. Shiromoto, Y. Lin, Mutually orthogonal  $t$ -designs over  $C$  related to quantum jump codes, 2012 Shanghai Conference on Algebraic Combinatorics, 2012 年 08 月 17 日, Shanghai Chiao Tong University, China.
- [18] 石井幸太, 神保雅一, 反応抑制のあるモデルのもとでのグループテストと効率的識別アルゴリズムについて, 統計関連学会連合大会, 2012 年 09 月 11 日, 北海道大学.
- [19] Y. Lin, M. Mishima, J. Sato, M. Jimbo, Tight Equi-Difference Conflict-Avoiding Codes of Odd Length and Weight Three, The 2nd Japan-Taiwan Conference on Combinatorics and its Applications, 2012 年 11 月 10 日, Nagoya University.
- [20] K. Ishii, M. Jimbo, Group testing on an inhibitor model and an effective positive detecting algorithm, The 2nd Japan-Taiwan Conference on Combinatorics and its Applications, 2012 年 11 月 10 日, Nagoya University.
- [21] 神保雅一, Mutually orthogonal partially balanced  $t$ -designs over  $C$ , 研究集会「離散数理構造とその応用」, 2012 年 11 月 18 日, 名古屋大学.
- [22] 石井幸太, 神保雅一, 反応抑制因子のあるモデルにおけるグループテストと効率的識別アルゴリズムについて, 科研費シンポジウム「医学統計と数理の接点を探る」, 2012 年 12 月 08 日, 南山大学.
- [23] Y. Lin, M. Mishima, M. Jimbo, Optimal equi-difference conflict-avoiding codes of length  $n = 6m$  and weight four, 応用数学合同研究集会, 2012 年 12 月 20 日, 龍谷大学.
- [24] Y. Lin, M. Mishima, M. Jimbo, Optimal equi-difference conflict-avoiding codes of length  $n = 6m$  and weight four, 応用数学合同研究集会, 2012 年 12 月 20 日, 龍谷大学.
- [25] M. Jimbo, S. Keisuke, Y. Lin, 量子ジャンプ符号と  $C$  上の直交  $t$ -デザイン, モダン符号理論からポストモダン符号理論への展望, 2013 年 03 月 04 日, 九州大学.
- [26] Y. Lin, M. Mishima, M. Jimbo, Equi-difference conflict-avoiding codes of length  $n = 2^a 3^b m$  and weight four, 44th SouthEastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, 2013 年 03 月 04 日, Florida Atlantic University, USA.
- [27] Y. Lin, M. Mishima, M. Jimbo, Optimal equi-difference conflict-avoiding codes of length  $n = 2^a 3^b m$  and weight four, 日本数学会年会, 2013 年 03 月 22 日, 京都大学.
- [28] 澤 正憲, Cubature formula, Hilbert identity, isometric embedding, GCOE - 第 22 回離散幾何解析セミナー, 2012 年 06 月 01 日, 京都大学数理解析研究所.
- [29] M. Sawa, M. Hirao, M. Jimbo, Optimalities of designs and configurations of points on the sphere, The 2nd Institute of Mathematical Statistics Asia Pacific RIM Meeting, 2012 年 07 月 01 日, つくば国際会議場.
- [30] M. Sawa, Constructions of optimal experimental designs of degree 3, 2012 Shanghai Conference on Algebraic Combinatorics, 2012 年 08 月 17 日, Shanghai Jiaotong University, Minhang campus(上海).
- [31] 澤 正憲, Hilbert identity, cubature formula, and combinatorial design, 応用数学合同研究集会, 2012 年 12 月 18 日, 龍谷大学.
- [32] 澤 正憲, 立体求積公式、ヒルベルト恒等式、最適実験計画, 日本数学会 2013 年会統計分科会, 2013 年 03 月 22 日, 京都大学.
- [33] Masakazu Jimbo, Quantum jump codes and related combinatorial designs, 2001 Taiwan-Japan Conference of Combinatorics and its applications (招待講演), 2011 年 4 月 3 日, 淡江大学(台湾).
- [34] Masakazu Jimbo, Mutually orthogonal partial  $t$ -designs over  $C$  related to quantum jump codes, 第 28 回代数的組合せ論シンポジウム, 2011 年 6 月 21 日, 大分大学.
- [35] M. Jimbo, Decompositions of the 2-design formed by the set of planes of  $AG(2n, q)$  for  $q = 2, 3$ , The 10th International Conference on Finite Fields and their Applications, 2011 年 7 月 11 日, Ghent, Belgium.
- [36] Masakazu Jimbo, Mutually orthogonal  $t$ -designs over  $C$  related to quantum jump codes, WilsonFest - a conference in honor of Rick Wilson, 2012 年 3 月 29 日, Caltech (Pasadena, USA).
- [37] 石井幸太, 神保雅一, 反応抑制のあるモ

デルのもとでのグループテストと効率的識別アルゴリズムについて, OR 学会中部支部研究発表会, 2012 年 3 月 10 日, 中部品質管理協会.

[38] 神保 雅一, Mutually orthogonal partially balanced t-designs over  $C$ , 研究集会「離散数理論とその応用」, 2011 年 11 月 19 日, 名古屋大学.

[39] 澤 正憲, ヒルベルト恒等式と球面上の立体求積公式, 熊本大学群論セミナー, 2012 年 1 月 20 日, 熊本大学.

[40] 澤 正憲, ヒルベルト恒等式と球面上の立体求積公式, 東北大学組合せ論セミナー, 2012 年 2 月 1 日, 東北大学.

〔図書〕(計 1 件)

[1] M. Jimbo, S. Kageyama 編, Taylor and Francis, Journal of Statistical Theory and Practice Special Issue: Combinatorial Configurations and Information Sciences, 2012, 238.

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

〔その他〕

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

神保 雅一 (Masakazu JIMBO)  
名古屋大学・大学院情報科学研究科・教授  
研究者番号: 50103049

### (2) 研究分担者

澤 正憲 (Masanori SAWA)  
名古屋大学・大学院情報科学研究科・助教  
研究者番号: 50508182

間瀬 茂 (Shigeru MASE)  
東京工業大学・情報理工学研究科・教授  
研究者番号: 70108190