様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 ２５ 日現在

機関番号：２１２０１

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2013

課題番号：２３６５４０３９

研究課題名（和文）非可換確率論における独立性概念の構成

研究課題名（英文）Construction of the notions of independence in non-commutative probability theory

研究代表者

村木　尚文（MURAKI, Naofumi）

岩手県立大学・総合政策学部・教授

研究者番号：６０２２９９７９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　1,600,000円、（間接経費）　480,000円

研究成果の概要（和文）：非可換確率論（＝量子確率論）においては、普遍的な‘独立性概念’を一つ指定するごとに一つの‘確率論’が生じるものと考えられるため、独立性の概念を理解することは重要である。独立性概念の新しい例として、古典的な独立性概念とヴォイクレスクの自由独立性の概念を補間する普遍的な独立性の１径数族（＝ q-独立性）を構成し、中心極限定理、少数の法則、畳み込み、キュムラント等の確率論的概念の q-類似を得た。さらに、新しい独立性概念として捩れ独立性を発見した。また、筆者による独立性概念の分類定理（2003年）はその証明が長く煩雑で読み通しがたいものであったが、正値性の仮定の下で証明の単純化に成功した。

研究成果の概要（英文）：Notions of independence are important in non-commutative probability theory (= quantum probability theory). We constructed a new notion of independence (= q-independence) which is a one-parameter family of independence interpolating classical independence and Voiculescu's free independence. The construction is based on the q-product operation for a family of non-commutative probability spaces. It is connected with the q-Fock space of Bozejko-Speicher. We constructed q-analogues of central limit theorem, law of small numbers, convolution and cumulants. We also discovered a new notion of independence which we call twisted independence. It arises from the twisted canonical anti-commutation relations of W. Pusz. We also gave a simple proof for the classification theorem for positive natural products (= positive universal independences).

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：非可換確率論　量子確率論　自由独立性　単調独立性　q-独立性　q-キュムラント　捩れ独立性　独立性の分類定理

１．研究開始当初の背景

80 年代における D.Voiculescu による自由確率論という新種の‘確率論’の発見により、非可換性を許容した枠組みにおける確率の世界においては、確率論は唯一つ定まるものではなく、古典確率論や自由確率論など複数の確率論がパラレルに存在する可能性が認識されてきた。

このような非可換性を許容した確率論の枠組みは非可換確率論と呼ばれる。非可換確率論における基本要素は非可換確率空間であり、それはある種の代数とその上で定義された正値線形汎関数との対として与えられる。ここで、代数は観測量（＝偶然量＝確率変数）の成す非可換代数を表し、正値線形汎関数は代数の各元（これは確率変数と解釈される）に対する期待値を与える汎関数を表す。代数としてある標本空間上の関数（＝確率変数）の成す可換代数をとり、また、線形汎関数として確率測度に伴う期待値汎関数をとった場合は、非可換確率空間は（観測量代数が可換代数であるという意味で）可換確率空間となる。

Voiculescu が確率論の自由類似を構成できた理由は、その理論においてすべての源となる自由独立性という根本概念を発見できたことにある。この自由独立性という概念は、ある意味で、古典確率論において独立性概念がはたす役割とパラレルな役割を自由確率論において果すものであり、自由確率論の根元である。

例えば、自由独立性の概念からスタートして、自由独立な（非可換）確率変数の列を考察することにより、自由中心極限定理、自由ポアソン極限定理（小数の法則の自由版）、自由畳み込み、自由レヴィ・ヒンチン公式、自由レヴィ過程等の理論が導かれる。

この自由独立性という概念の存在は、非可換確率論ならではの特徴的な現象である。というのは、可換確率空間の圏においては独立性概念は唯一だけ存在し、それは古典的な独立性概念に一致するということが M. Schurmann や R. Speicher により証明されているからである。他方、非可換確率空間の圏においてはちょうど３つの独立性概念が存在することが同じく Speicher により 90 年代半ばに証明されている。その３つとはテンソル独立性（＝古典独立性）、自由独立性、ブール独立性の３者である。なお、第３の独立性であるブール独立性からはブール確率論が導かれる。

筆者にとり、古典確率論と自由確率論の関係はちょうど幾何学の領域におけるユークリッド幾何学と非ユークリッド幾何学の関係のように映った。確率論の領域において、測度論に基づいた古典確率論（＝コルモゴロフ確率論）の性質が必ずしも成立しない新しい確率論（非コルモゴロフ確率論）として生まれたのが自由確率論であるとの見方である。ちょうど、非ユークリッド幾何（の一つ）である双曲幾何においては三角形の内角の和が 180 度より小さくなるという奇妙な現象が生じるように、非コルモゴロフ確率論（の一つ）である自由確率論においては中心極限分布は正規分布ではないもの（Wigner 半円分布）となるという奇妙な現象が生じるのである。

このような見方に立って非可換確率論を眺めるとき、次の疑問が自然に浮かび上がってくる。それは「非可換な確率世界においては一体どのぐらい多様な‘確率論’が論理的に存在可能であるのか？」という疑問である。これはある意味では、非可換確率論の基本問題であると考えられる。この基本問題に対し、筆者はいくつかの部分的な解答を与えてきた。

筆者は最初 Speicher による「３つしかない」という結果を知らなかったため、自由独立性以外の新しい独立性概念の発見に取り組んだのであるが、その結果、単調独立性という新しい独立性概念を 2000 年頃発見することができた。この単調独立性からは、単調畳み込みや単調レヴィ・ヒンチン公式などの単調確率論を展開できる。

その後、 Speicher による「３つしかない」という定理を知り、この定理を単調独立性を含むように拡張することを試みた。Speicher による「３つしかない」という結果は基本的であるが、そこにおいては独立性概念に対してある種の可換性条件が課されていた（筆者が発見した単調独立性はこの条件を満たしていない）。筆者はこの可換性条件を落とし、独立性の概念を少しだけ弱めたものを考察した結果「（可換性条件を仮定しない）独立性概念はちょうど５つだけ存在する」という分類定理を得た。ここで、その５つとは、テンソル独立性、自由独立性、ブール独立性、単調独立性、反単調独立性の５者である（このうち、反単調独立性は単調独立性の鏡像であり、本質的には両者は同じものと考えてよい）。

筆者の結果により、非可換確率論において基本的な独立性概念は４種類であるということが確立した。しかしながら、「非可換確率論において存在可能な独立性概念」ということについて、更にいくつかの疑問が生じる。テンソル独立性はある意味ではボソンフォック空間に付随するものと考えられるが、それならばフェルミオンフォック空間に付随する独立性概念があってしかるべきのようにも思われるがそれが上記の４種類の中に無いのは何故なのか。既存の独立性概念の捉え方を見直し、独立性概念を拡張することにより、フェルミオン的独立性を構成できないか。また、ボゾンフォック空間と自由フォック空間を補間する１径数変形として q-フォック空間があるが、テンソル独立性と自由独立性を補間するような独立性概念は存在しないのか。Nica、Maassen、Oravez 等によ

る q-畳み込みの研究は存在するのだが、q-独立性の構成について決定的な結果は知られていない。また、もしそのような仮想的な独立性概念が存在しないのだとしたらその根本的な理由はどこにあるのか。

非可換確率論における独立性概念の多様性についての以上のような種々の疑問点を解明することに関心があり、これらを動機・背景として、本研究を開始した。

２．研究の目的

前項で説明したように、非可換確率論においては可換確率論の場合とは異なり複数の独立性概念がパラレルに存在する。そして、その結果、独立性概念たちから生み出された複数の‘確率論’たちがパラレルに存在する。非可換確率論の基本問題として「非可換な確率世界においては一体どのぐらい多様な‘確率論’が論理的に存在可能であるのか」という問題をとりあげ、この問題を解明したい。筆者の立場では、新しい‘確率論’を構成することは、新しい独立性概念を構成することを意味する。非可換確率論における既知の基本的な独立性概念は、テンソル独立性、自由独立性、ブール独立性、単調独立性の４種類である。しかし、これら以外にも存在してしかるべきと考えられる仮想的な独立性概念がいくつか想像される。例えば、フェルミ独立性や q-独立性などである。本研究では、このような独立性概念の新しい例を構成することを通して、独立性の概念の理解を深めることを目的とする。

３．研究の方法

方法のうち数学の内容に関わる技術的な部分については、次のようにいくつかの段階に整理して、問題にアプローチする。

既知の独立性概念である４つの独立性（テンソル独立性、自由独立性、ブール独立性、単調独立性）の構成方法について振り返ってみると、これらはいずれもフォック空間の概念と結びついていることが分かる。具体的には、それぞれ、ボゾンフォック空間、自由フォック空間、ブールフォック空間、単調フォック空間の４つのフォック空間である。従って、新しい独立性概念を構成する場合、何らかの意味でのフォック空間を手がかりとして構成すべきであると考えられる。

また、４つの独立性概念の構成について振り返ると、それらはいずれも非可換確率空間の族に対する積演算の構成と結びついていることが分かる。具体的には、それぞれ、テンソル積、自由積、ブール積、単調積の４つの積演算である。従って、新しい独立性概念を構成する場合、何らかの意味での積演算を構成する必要があると考えられる。

（仮想的な）フェルミ独立性は、（仮想的な）q-独立性に含まれると考えられるので、まずは q-独立性の構成に取り組むべきであると考える。その場合、q-独立性が構成された暁には、それは q=1 ではボゾンフォック空間とテンソル積演算に特殊化され、また、q=0 では自由フォック空間と自由積に特殊化されるべきものである。このことを念頭に置いて、q-積の構成に取り組むべきである。

q-積の構成に成功したならば、それに対し、普遍的な展開係数が存在することを証明しなければならない。その場合には、オペレータの反転の計算等に必要な組合せ論的な公式を準備しながらアプローチする。

展開係数の存在が証明されたならば、次にこの展開係数が記述する混合モーメント計算規則（＝独立性概念）が、q-独立性概念と呼ぶに相応しいものであることを証明する。例えば、中心極限定理、少数の法則、畳み込みなどの概念がうまく機能していることを証明する。

４．研究成果

本研究では、非可換確率論における独立性概念の新しい例である q-変形独立性を構成しその種々の性質を明らかにした。また、非可換確率論においては独立性概念はちょうど５つしか存在しないという独立性の分類定理について、既存の証明は複雑で見通しの悪いものであったが、正値性の仮定の下で証明を単純化することに成功した。この２つが本研究の大きな成果である。

q-変形独立性は、q=0 で自由独立性に一致し、q=1 でテンソル独立性に一致するようなに独立性概念の１径数族である。ただし、ここでいう独立性概念とは、非可換確率変数たちの混合モーメントに対する普遍計算規則として定式化される。Speicher による分類定理（独立性は３つしかない）や筆者による分類定理（独立性は５つしかない）においては、独立性概念の数学的定式化である普遍計算規則に対して、結合法則が成立するという条件を課している。本研究においては、Speicher や筆者による独立性概念の定式化から結合法則が成立するという条件を落とすことにより、広げられた枠の中で普遍計算規則としての q-独立性の概念を構成した。

ちょうどテンソル独立性が非可換確率空間たちのテンソル積により実現され、自由独立性が非可換確率空間たちの自由積から実現されるように、q-独立性の概念は非可換確率空間たちに対する q-積という新しい演算を導入することにより構成することができる。q-積の構成に当たっては、テンソル積とボソンフォック空間との対応関係および自由積と自由フォック空間との対応関係を批判的に分析し、試行錯誤を繰り返すことによ

り、Bozejko-Speicher の q-フォック空間と対応するはずの q-積の演算を実験的に見出した。与えられた非可換確率空間の族に対しこの q-積を具体的に構成するためには、族の中のそれぞれの非可換確率空間の GNS 表現を構成し、それを q-フォック空間の中に埋め込むことが必要となる。この埋め込み写像の構成は試行錯誤の末見出した非自明なものであり、本研究成果の核心部分の一つである。

H. Yoshida によるフォック空間演算子の積の期待値についてのカード配列の手法を用いることにより、この q-積が実際に普遍計算規則を一意に定めていることを証明した。これは q-独立性の概念を構成できたことを意味する。この q-独立性が自由独立性とテンソル独立性を補間していることはその構成から直ちに従う。

また、この q-独立性に付随する極限定理について調べ、その結果、q-中心極限定理が成立し、その極限分布は Bozejko－Speicher の q-ガウス分布に一致することを証明した。また、小数の法則の q-類似が成立し、その極限分布は Saito－Yoshida が直交多項式の視点により構成した q-Poisson 分布に一致することを証明した。さらに、台がコンパクトな確率測度のクラスにおいて、畳み込み演算の q-類似および、キュムラント概念の q-類似を構成した。著者が導入した q-畳み込みと q-キュムラントは、M. Anshelevich の q-畳み込みや q-キュムラントと異なり、台がコンパクトであり限り、任意の確率測度に対して定義可能な概念となっている。q-独立性に関するこれらの成果については、現在、細部を整理している際中であり、今後、論文として投稿する予定である。

また、q-独立性とは異なる新しい独立性概念として捩れ独立性の概念を発見した。これはW. Pusz による捩れ反正準交換関係を分析することにより見出した概念である。これに対しても中心極限定理やキュムラント等の確率論的諸概念を展開できる見込みがあり、その詳しい性質を調べることは今後の課題である。

独立性概念の分類に関する既存の結果として、Speicher による分類定理（普遍性、可換性、結合性、正規性の４条件を満たすものは３つしかない）と筆者による分類定理（普遍性、結合性、正規性の３条件を満たすものは５つしかない）が知られている。このうち、筆者による分類定理については、その証明においておよそ 100 個の未知数に関する連立２次方程式を解くプロセスが必要であり、非常に煩雑で読みづらいものとなっている。そこで、この分類定理のより単純な別証明を見出すことは、非可換確率論の基礎を明確に理解するうえで重要な課題である。筆者は、本研究において、この分類定理に対してある意味での簡単な別証明を見出した。ある意味でという留保条件をつけたのは、この単純化は、普遍性･結合性･正規性の３条件に、正値性という新しい条件を追加した上で成されたものだからである。既知の５つの独立性（テンソル、自由、ブール、単調、反単調）は自然に正値性を満たしているし、‘確率論’であるからにはこの正値性を要請することはごく自然なことである。煩雑な証明を許すのであれば、もちろん正値性は普遍性・結合性・正規性の３条件から証明可能なものである。しかし、分類定理に対して単純な証明を望むのであれば、いまのところ、この正値性を仮定する証明しか得られていない。筆者の得た単純な証明においては、正値性から適当な空間におけるコーシーシュワルツ不等式を導き、このことを用いて、与えられた独立性概念に付随する普遍計算規則の展開係数について悪い係数は皆消えてしまうことを示すというのがミソである。(2003 年の論文においては、この悪い係数が消えるということを示すのに、およそ 100 変数の連立方程式を解くという代数的な議論が必要であった。今回は、正値性を仮定したおかげで、代数的な議論の代わりに不等式の評価という解析的な手法を用いることが可能となり、大きな連立方程式を解くという煩雑なプロセスを回避することができたのである。）よい係数だけが生き残るということと筆者の 2002 年の結果（準普遍積の分類定理）を結びつけることにより、普遍性・結合性・正規性・正値性の４条件を満たす独立性概念（普遍積）はちょうど５つしかないということの単純な証明が完成する。この成果については、2013 年に学術論文として発表した。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 1 件）

① N. Muraki, A simple proof of the classification theorem for positive natural products, Prob. Math. Statistics, 査読有, 33, No.2, 315-326, 2013

〔学会発表〕（計 11 件）

① N. Muraki, q-Deformation of free independence, Seminaire d'Analyse Functionnelle, 2013 年１０月１日(Besancon, フランス)

② N. Muraki, q-Deformation of free independence, Algebra und functional analytische Anwendungen, 2013 年９月２５日 (Greifswald, ドイツ)

③ N. Muraki, q-Deformation of free independence, Free Probability Seminar, 2013年７月１１日（Saskatoon，カナダ）

④ N. Muraki, On a q-deformation of free independence Workshop on Combinatorial and Random Matrix Aspects of Noncommutative Distributions and Free Probability, 2013年７月５日（Toronto，カナダ）

⑤ N. Muraki, Twisted independence from twisted CAR, Recent Advances in Operator Theory and Operator Algebras, 2013年１月８日（Bangalore，インド）

⑥ N. Muraki, q-Deformation of free independence, International Conference on Operator Algebras in Non-equilibrium Statistical Mechanics, 2012年１２月２１日（Goa，インド）

⑦ N. Muraki, Twisted independence for noncommutative random variables, 15th Workshop on Non-Commutative Harmonic Analysis, 2012年９月２８日（Bedlewo，ポーランド）

⑧ 村木尚文，非可換確率論における独立性概念，CMRU研究集会「量子確率論と量子ウォーク」，2012年７月４日（東北大学情報科学研究科）

⑨ N. Muraki, q-Deformation of stochastic independence in non-commutative probability theory, International Workshop on Anomalous Statistics, Generalized Entropies, and Entropies, and Information Geometry, 2012年３月８日（奈良教育大学）

⑩ N. Muraki, On a q-interpolation between classical independence and free independence, Mathematical Studies on Independence and Dependence Structure: Algebra meets Probability, 2011年１２月１９日(京都大学数理解析研究所)

⑪ N. Muraki, Noncommutative independence, 32nd International Conference on Quantum Probability and Related Topics, 2011 年６月２日（Levico Terme，イタリア）

６．研究組織

(1)研究代表者

村木尚文（MURAKI，Naofumi）
岩手県立大学・総合政策学部・教授
研究者番号：６０２２９９７９