

科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 31 日現在

機関番号：12601

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：平成23年度～平成24年度

課題番号：23654047

研究課題名（和文）代数的解析的手法による幾何学的非線形問題の解明

研究課題名（英文）Study of nonlinear geometric problems by methods of algebraic analysis

研究代表者

片岡 清臣 (KATAOKA KIYOOMI)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：60107688

研究成果の概要（和文）：3次元空間内の、2種類以上の円の連続族を含む曲面はある5階非線形偏微分方程式系で完全に特徴づけられる事を示し、その極めて複雑な方程式の具体形を与えた。その応用としてこのような曲面を分類するパラメータの数の上限評価を与え、最終的には5個の1変数関数に対する代数的な5階非線形常微分方程式の有限系に帰着する事を示した。

研究成果の概要（英文）：We succeeded in describing the surfaces in R^3 which include several continuous families of circles completely by some systems of nonlinear partial differential equations of order 5. We gave explicitly the very complicated form of this system of equations. Further, as applications, we obtained an upper estimate of the number of parameters classifying those surfaces, and a reduction of this system to a finite system of algebraic ordinary differential equations for 5 unknown functions of one variable.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2011年度	500,000	150,000	650,000
2012年度	500,000	150,000	650,000
総計	1,000,000	300,000	1,300,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数方程式

1. 研究開始当初の背景

3次元ユークリッド空間内の滑らかな閉曲面で、各点を通る2種類以上の円を含む球でない曲面としてトーラス(4種類)、Blum cyclide (6種類)などが知られていた。東京学芸大学の竹内伸子教授はこのような極めて偶然性の高い曲面に大学院生時代から興味を持ち、各点に7種類以上の円の族を含む閉曲面で種数、すなわちドーナツ面のように穴の数が1以下の曲面では球面以外にありえない事を1980年代に証明していた。しかしそのような従来の幾何学に基づく研究では基本群やホモロジー群など曲面の大域的性質を利用して候補となる曲面をしばり込む、

という方法しかなく、このような曲面を直接導き出す数学的理論が存在なかった。しかし平成22年度頃からの竹内教授との共同研究でこのような曲面を表す関数が2変数5階の非線形偏微分方程式系を満たすことを発見した。しかしこの方程式系は大変複雑な長い数式で与えられていたため、応用のためにはこの方程式系のより短い表現を得る必要性や、条件式の必要十分性などを示す必要があった。

2. 研究の目的

上記背景で述べたような、幾何学からの古典的な問題として2種類以上の円弧の連続な

族を含む曲面（必ずしも閉曲面とは限らず，曲面片にまで一般化して考える）をすべて決定する事．またその決定につながる，微分方程式を基礎とする，なるべく直接的でわかりやすい理論を開発すること．さらに解析学の立場からは5階非線形偏微分方程式系の珍しく，かつ重要な実例ということでその解析を通じて偏微分方程式の新たな理論を作ること．

3. 研究の方法

(1) 既に得ていた5階偏微分方程式系は極めて長い数式であるのでそのままでは大変扱いづらかった．そこで，

①方程式系のより短い表現を得る，
②この複雑な方程式系の信ぴょう性を担保し，応用しやすくするため，数式処理プログラムの形で表現する，
などの方法によりこの方程式系を扱い易くする．

(2) 方程式系が多種の円弧の連続族を含むために必要十分であることを示す．

(3) 円弧の族を2種含む場合の方程式系の解のなす空間の決定．少なくとも有限次元性とその次元の上下からの評価．

(4) 円弧の連続族を6種含む場合は既に知られている cyclides に限るかどうか方程式系と数式処理を使って調べる．またその結果をもとに2種の場合の解の構造をより詳しく調べる．

4. 研究成果

(1) 研究方法の(1)，(2)，(3)については，23年度中にはほぼ初期の予想通りの成果を得た．すなわち

①まず A4 版で4頁ぐらいに及ぶ1つの5階偏微分方程式を，曲面を定義する関数の微分階数の順に重みをつけて並び替え，同類項を手計算で注意深く集めてまとめることにより約2頁半ぐらいの式に短縮することができた．同時に導出した方程式の検算や応用を容易にするため，数式プログラムで表現し，下記のホームページからダウンロードできるように公開した．

②方程式系が円弧の連続族を含む曲面であることの必要十分条件であることを示した．特に方程式系が円弧の連続族を含むための十分条件であることを示すことが難しく，登場するいくつかの未知関数の間に成立する可積分条件のようなものを発見することにより解決できた．

③この種の曲面のもっとも広いクラスであ

る，円弧の族が2種類の曲面の場合には解の空間が有限次元であり，高々2次元であることを示した．実際微分方程式系は2連立となるが準線形解析的楕円型方程式系となることから解は解析関数となる．また解析関数であることと2連立であることを使って解は考える点での8階までの微分係数で決定されることがわかった．さらに詳しい解析により8階までの微分係数に係る21個のパラメータのみで解が決定されることを示した．

④以上は円弧の連続族を複数含む，という曲面に関する研究であるが曲面上の指定した1点において最大いくつの個別の円弧が通りうるか，という問題も幾何学的に重要であった．実際竹内教授はこのような見地から種数が1以下の閉曲面では臍点と呼ばれる点以外ではその数は6以下であることを示した．本研究に先立つ竹内教授との共同研究でもまず曲面の種数に条件を付けずにこの数の上限を評価することから始まったが，4階微分可能な曲面に対して基本多項式と呼ぶ変数 T の10次多項式 $Z(T)$ を新たに導入することにより円弧の存在が $Z(T)=0$ の実数解 T に対応していることがわかった．本研究ではこれを使って曲面上の非臍点を通る円弧または線分の最大数は10以下であることを示した．ただしこれは10次多項式だからすぐ実数解10以下で円弧の数が10以下，というわけではない．実際色々退化するケースでは別のことで円弧の数が増える可能性があり12通りのケースを丹念に調べ，いずれの場合も円弧または線分の総数が10以下であることを示す必要があった．また，この10という数はベストポシブルであるのかどうか，という問題もある．実際初期の予想では $Z(T)=0$ の実数解は常に高々6であろうと予想していた．しかしこの問題を，実係数を持ち，係数の間にいくつかの関係式と不等式をみたす10次多項式の問題，として捉え直すことにより，数式処理プログラムを使って，互いに異なる0でない10個の実数解をもつ場合があることを突き止めた．これは対応する曲面がその点を通る10個の円弧を含むということを必ずしも意味するわけではない．しかし少なくともその点を通る10個の円弧が存在して各円はその点からの距離の4次のオーダーより近い距離でその曲面の近くに存在している事が示せた．

以上の結果は論文(1)とその短い解説(2)の中で公開されている．

(2) 方法(4)に沿っての研究において，曲面を定義する関数の考えている点での3階微分係数がすべてゼロである，という付加

的な条件下で予想通りの成果を得た。すなわち6種類の円弧の連続族を含みさらに若干の生成的な条件をみたす曲面は **cyclide** に限ることを示した。結果は論文(3)に含まれている。この証明は(1)で得た偏微分方程式の細かい項にわたる情報を、数式処理によって処理し、得ることができた。しかし直接数式処理にかけると6元6連立の数式係数の1次方程式系を解く必要があってそれは普通のパソコンでは処理できないレベルのものであった。しかし形の特異性をうまく使って極めて短い計算で結論を得ることができると気づき、計算を実行することができた。また関連する計算においても直接の数式処理では結論が出ないものが多く、大幅な工夫を要した。

(3) 24年度始めには偶然発見したサウジアラビアの **Pottman** 教授らがインターネット上で公開した論文により2種類の円弧の連続族を含む、**cyclide** でない曲面の例を知り衝撃を受けた。実はそれまでは結局フランスの数学者 **Darboux** が20世紀初めに定義した、**cyclide** と呼ばれる、特殊な形の3変数4次式で表される代数曲面しかないのではないかと予想していたからである。この衝撃により対応する2連立偏微分方程式系のより深い構造解析が必要であることを痛感した。実際2連立の偏微分方程式系のみでは解空間の決定が極めて難しく、解を構成する方法は冪級数展開による方法しか思い当たらなかった。しかしここで従来避けてきた円の族を含む曲面を表すのに1変数関数5個を使う、構成的な表現があるがこれを1つの円の族に対して使えるのではないかと、というアイデアに行き着いた。このときもう一つの円の族を含むことは我々が得た5階偏微分方程式を使えばいい。ただ通常考える3次元空間内の円を表す構成的な表現では中心の位置や円を含む平面の法線ベクトル、半径などを与え、三角関数を使って3次元の座標を与える。しかしその方法では表現が複雑になるだけでなく、三角関数という非代数関数が入ることによるデメリットが大きい。そこで(2)の成果を得る際、具体例の計算で威力を発揮した、円周の有理関数による表示に行き着いた。これらのアイデアと方程式系を微分方程式ではなく、**T**に関する代数方程式と考える、というアイデアを使って最終的に5個の1変数未知関数に対する多項式型5階常微分方程式の有限系へ帰着される事を示すことができた。これに関する論文は投稿中である。ただし結果はあくまで理論的証明であって具体的計算となると膨大な数式処理が必要になり、2種類の円弧の族を含むすべての曲面の決定など、最終結論を得るためにはいくつも克服すべき困難がある。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

(1) Kiyoomi KATAOKA, Nobuko TAKEUCHI, A system of fifth-order partial differential equations describing a surface which contains many circles, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 査読有り, 137(2013), 325-360. (DOI: 10.1016/j.bulsci.2012.09.002).

(2) Kiyoomi KATAOKA, Nobuko TAKEUCHI, On a system of fifth-order partial differential equations describing surfaces containing two families of circular arcs, *Complex Variables and Elliptic Equations*, 査読有り, 2013, 1-13, iFirst (DOI: 10.1080/17476933.2012.746967).

(3) Kiyoomi KATAOKA, Nobuko TAKEUCHI, The non-integrability of some system of fifth-order partial differential equations describing surfaces containing 6 families of circles, *RIMS Kokyuroku Bessatsu*, 査読有り, B40(2013), 95-117.

[学会発表] (計2件)

① 多種の円弧の連続族を含む曲面を記述する5階偏微分方程式系, 日本数学会秋季総合分科会函数解析学特別講演, 九州大学, 2012.9.

② A system of fifth-order PDE's describing surfaces containing 2 families of circular arcs and the reduction to a system of fifth-order ODE's, 京都大学 RIMS 共同研究「超局所解析と漸近解析の最近の進展」(研究代表者: 岡田 靖則(千葉大 理)), 京都大学数理解析研究所, 2012.10.

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

○取得状況 (計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:

国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等

円の族を含む曲面と 5 階偏微分方程式系

<http://www.u-gakugei.ac.jp/~nobuko/manycircles.html>

または

<http://agusta.ms.u-tokyo.ac.jp/microlocal/manycircles.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

片岡 清臣 (KATAOKA KIYOOMI)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：60107688

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし