

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 15 日現在

機関番号：32682

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2014

課題番号：23654052

研究課題名(和文)非線形シュレーディンガー方程式の解の爆発時間を越えての延長可能性

研究課題名(英文)An investigation of the continuation problem for the nonlinear Schroedinger equations beyond the singularity

研究代表者

名和 範人(Nawa, Hayato)

明治大学・理工学部・教授

研究者番号：90218066

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：本課題は、擬共型不変な非線形シュレーディンガー方程式の爆発解の爆発時刻後への接続問題を数学として厳密に定式化することを目標として、爆発時刻近傍での解の詳細な挙動を解の背後にあるネルソン拡散過程や解の絶対値の自乗の等位面内の点の運動を記述する方程式を用いて解析を行った。完全な定式化には至らなかったが、爆発解の爆発速度の評価を、ネルソン拡散過程を用いて得ることに成功した。また、数値解析手法を議論する中で新たな課題や知見が得られ、新しい科研費研究課題として継続されていくことになった。

研究成果の概要(英文)：This project was devoted to the study of the continuation problem of blowup solutions of the pseudo-conformally invariant nonlinear Schroedinger equation beyond the singularity. We tried to establish a rigorous mathematical concept to extend blowup solutions beyond the blowup time so that we investigated the precise behavior of the solution near the blowup time by means of the Nelson diffusion as well as a system of degenerate ordinary differential equations which had been found during the preparation of this project: the system of ODE describes the behavior of points in a level set of the square of the absolute value of the solution. Although we could not succeed to establish a significant concept of extending the blowup solutions, we obtained an estimate on the blowup rate for a class of blowup solutions and learned the importance of the numerical study to get an idea which lead us to a new KAKENHI project investing the blowup problem including other type of evolutionary equations.

研究分野：非線形偏微分方程式と応用確率解析

 キーワード：非線形シュレーディンガー方程式 爆発解 ネルソン拡散過程 曲線の運動 クリスタライン 等位面
爆発速度

1. 研究開始当初の背景

- (1) 光ファイバーのような非線形媒質中を伝播するレーザービームの自己集束現象(カー効果)を記述する、よく知られた数理モデルは、大域的なゲージ不変性を成立させるような3次の非線形項を持った非線形シュレーディンガー方程式である。この方程式は擬共型変換の下で不変であるという際立った数学的な性質をもっており、この擬共型不変性は実際の解の性質に色濃く反映されている。特に有限時間で爆発する解は、その絶対値の自乗(ビームの強度)がディラックのデルタ関数的な特異性を生成することが知られていた。
- (2) 数学的には上述の特異性が生じることで解の寿命は尽きてしまうが(解の爆発)、実際の現象ではビームの集束後に再びビームが伝播する現象が確認されていた。このような現象を記述する能力を我々の数理モデルである非線形シュレーディンガー方程式が持っているかどうかは、当該分野の懸案の課題であった。
- (3) 擬共型変換を用いて定在波解から作られる爆発する特殊解は、あたかもレンズで光を集めたように焦点を結び(線形集束と呼ばれる)、その後、再び伝播を続けるような解である。数学的には解の爆発後の両側に線形集束する二つの爆発解があることになるが、上述(2)の課題の特殊な場合として、これら二つ解は一つの解であると思わせるような数学的意味づけを与えることは、突破口として興味深い課題として考えられていた。
- (4) 擬共系不変な非線形シュレーディンガー方程式の爆発解の爆発速度の評価を完成すべく、研究代表者は解の背後にあるネルソン拡散過程を使った解析を行っていた。このような解析を遂行するなかで、特異点近傍における爆発解の絶対値の自乗の等位面上に属する点の運動を表すような微分方程式系を、ネルソン拡散過程を記述する確率微分方程式に現れる移流項を用いて書くことができていた。クリスタライン運動に関する数学や数値解析の成果の応用可能性を強く感じた。
- (5) この研究課題が採択される直前に、G. Fibich 教授から、彼と M. Klein 博士による上述の線形集束する爆発解の意味づけを与える試みに関する論文のプレプリントが送られてきたが、本課題とは異なるアプローチがなされていた。

2. 研究の目的

- (1) 一般的な時空における擬共型不変な非線形シュレーディンガー方程式の爆発解の爆発時刻を越えての接続可能性を

探求することが本課題の主な目的である。時空が 1+2 次元のとき、非線形媒質中を伝播するレーザービームの自己集束のモデル方程式となっている。究極には、爆発時刻を越えての解の接続を物理的にも意味のあるものとして、数学として厳密に定式化することを目指す。

- (2) 爆発解の爆発時刻後への接続問題を数学として厳密に定式化するためには、爆発解のより詳細な漸近および極限形状の情報が必要となる。そのために従来型の研究の継続も重要である。特に、爆発時刻では解の位相に関する情報を失うので(非線形シュレーディンガー方程式の解は複素数値である)、その回復のためにも、解の背後にあるネルソン拡散過程を用いた爆発速度の解析と、ビーム強度に相当する爆発解の絶対値の自乗の等位面の運動を利用した特異点の形状の解析を行う。
- (3) 必ずしも擬共型不変でない場合の非線形シュレーディンガー方程式の爆発解の解析も行い、擬共型不変な場合の解析との比較を行うなどして、今後の当該分野の発展のために新たな知見の獲得を目指す。

3. 研究の方法

- (1) 等位面上の点の運動を記述する方程式を用いて、爆発解の特異点近傍の形状を解析し、爆発時刻で失う解の位相部分の情報を回復できるか調べる。
- (2) ネルソン拡散過程を利用して、特異点近傍のその経路の様子を解析するなどして解の爆発速度の評価を行い、それによって解の位相部分の情報回復を謀る。
- (3) 等位面の運動は、1+2 時空の場合、平面上の曲線運動と見なすことが可能である。この運動の解析に、クリスタライン運動に関する数学や数値解析の成果の応用可能性を探求する。
- (4) クリスタライン運動で用いられた数値解析手法を発展させて新しい爆発解の数値解析的な手法の開発を試みる。
- (5) 擬共型不変でない場合の非線形シュレーディンガー方程式の爆発解および時間大域解の解析なども行い、それらの解を用いて擬共型不変な場合の爆発解の近似解析の可能性を探求する。

4. 研究成果

- (1) 擬共型不変な非線形シュレーディンガー方程式の爆発解の背後にあるネルソン拡散過程を考えて、ブラウン運動の末尾事象に注目することにより爆発スピードの下からの評価が可能となった(論文準備中)。上からの評価も、現状知られているような極限形状を仮定すれば可能であるように思われる。これはある意味で従来知られていた爆発速度

の解析([1] [2])とは異なる視点を与えており、今後の発展が十分に期待できる。しかしながら、拡散過程の経路と決定論的な等位面の運動との関係を結びつけるような厳密な数学的なツールを開発することはできなかった。

- (2) 擬共型不変でない優臨界な非線形項を持つシュレーディンガー方程式の基底波解の不安定性については、ソボレフ臨界指数を含む場合でも球対称解については証明することができた。この場合の方が、擬共型不変な非線形シュレーディンガー方程式の解析より容易に思えるところがあり、「逆摂動論的」に近似解析に応用できるかどうか研究を継続しているところである。
- (3) 等位面の運動について議論していく中で、それと関係するクリスタライン運動については、幾つか進展があり、駆動力付クリスタライン曲率流によるスパイラル解の大域存在や、曲率流に関連するある準線形放物型方程式の爆発解の性質の解析には進展があった。
- (4) 等位面の解析は予想よりも困難を極め、数値的な試みを多く行う必要性を痛感した。爆発挙動の追跡は、その解の性質上、技術的に難しいものがあるが、数値解析手法の開発を議論する中で、半線形波動方程式の爆発解の延長問題についても議論した。その結果、その場合には特異点を迂回するような数値解析が可能であることがわかり、その解析自体興味深いものであるが、非線形シュレーディンガー方程式の爆発解の解析にも役立つようなことがわかり、本課題の内容を引き継ぎ包含するような研究テーマへと展開した。それが、本課題の分担者が代表者となり、代表者が分担者となった2015年度に採択された科研費の研究課題である [5]。
- (5) G. Fibich 教授を招聘し、彼と M. Klein 博士による、1+2 時空における擬共型不変な非線形シュレーディンガー方程式の爆発解の延長問題に関する成果([3] [4])について議論した。彼らの方法は非線形ダンピング項を付加したり非線形指数飽和を用いて特異点を回避することによって爆発解を近似して解析するが、やはり方程式の解の位相部分の情報を失う。線形集束を示すような爆発解に対しては、集束の前後のビーム開度の比にある種の普遍性が見られることが数値解析で確認されている。G. Fibich 教授との議論により、消失した情報を回復することはかなり困難な問題であることが確認されたが、この現象を数学的に証明することが今後の研究課題の一つである。

参考文献：

[1] Merle, F. and Raphael, P., Sharp upper bound on the blow up rate for critical nonlinear Schrödinger equation, Geometric Functional Analysis, vol 13, 591--641 (2003)

[2] Merle, F. and Raphael, P., Blow-up dynamics and upper bound on the blow up rate for critical nonlinear Schrödinger equation, Annals of Mathematics, vol 16, 157--222 (2005)

[3] Fibich, G. and Klein, M., Continuation of the nonlinear Schrödinger equation beyond the singularity, Nonlinearity, vol 24, 2003-2045 (2011)

[4] Fibich, G. and Klein, M., Non-linear-dumping continuation of the nonlinear Schrödinger equation -a numerical study-, Physica D, vol 241, 519-527 (2012)

[5] 石渡哲哉 (研究代表) : 挑戦的萌芽研究「爆発現象の数値解析の新展開～爆発曲線, 領域爆発, 再爆発現象～」平成27年度～平成29年度

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計12件)

- ① T. Ishiwata, Motion of spiral polygonal curves by nonlinear crystalline motion with a rotating tip motion, Special Issue of MATHEMATICA BOHEMIA dedicated to Equadiff 13, 査読あり, 2015, 掲載予定.
- ② K. Anada and T. Ishiwata, Some features for blow-up solutions of a nonlinear parabolic equations, IAENG International Journal of Applied Mathematics, 査読あり, 2015, 掲載予定.
- ③ T. Ishiwata, On spiral solutions to generalized crystalline motion with a rotating tip motion, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Ser. S, 査読あり, 2015, 掲載予定.
- ④ T. Ishiwata and S. Yazaki, A fast blow-up solution and degenerate pinching arising in an anisotropic crystalline motion, 査読あり, Discrete and Continuous Dynamical Systems Ser. A, 査読あり, vol 34, no 5, 2014, 2069-2090, DOI: 10.3934/dcds.2014.34.2069
- ⑤ T. Ishiwata, Crystalline motion of spiral-shaped polygonal curves with a tip motion, Discrete and Continuous

- Dynamical Systems, Ser. S, 査読あり, vol 7, no 1, 2014, 53-62, DOI: 10.3934/dcads.2014.7.53
- ⑥ T. Akahori and H. Nawa, Blowup and scattering problem for the nonlinear Schrödinger equations, Kyoto Journal of Mathematics, 査読あり, vol 53, no 3, 2013 629 - 672, DOI: 10.1215/21562261-2265914
- ⑦ T. Akahori, S. Ibrahim, H. Kikuchi and H. Nawa, Existence of a ground state and scattering for a nonlinear Schrödinger equation with critical growth, Selecta Mathematica, new series, 査読あり, vol 19, issue 2, 2013, 545-609, DOI: 10.1007/s00029-012-0103-5
- ⑧ H. Nawa, Nelson diffusions and nonlinear Schrödinger equations, RIMS Kokyurku “Stochastic process and statistical phenol behind PDEs”, 査読なし, vol 1823, 2013, 172-181, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1823-11.pdf>
- ⑨ T. Akahori, H. Kikuchi and H. Nawa, Scattering and blowup problem for a class of nonlinear Schrödinger equations, Differential and Integral Equations, 査読あり, vol 25, no 11-12, 2012, 1075-1118, <https://projecteuclid.org/euclid.die/1356012252>
- ⑩ T. Akahori, S. Ibrahim, H. Kikuchi and H. Nawa, Existence of ground state and blow up problem for a nonlinear Schrödinger equation with critical growth, Differential and Integral Equations, 査読あり, vol 25, no 3-4, 2012, 383-402, <https://projecteuclid.org/euclid.die/1356012740>
- ⑪ T. Ishiwata, Motion of polygonal curved fronts by crystalline motion: V-shaped solutions and eventual monotonicity, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Supplements, 査読あり, issue special, 2011, 717-726, <https://aims sciences.org/journals/displayPaperPro.jsp?paperID=7048>
- 〔学会発表〕(計19件)
- ① Tetsuya Ishiwata, On the set of blow up set of type II blow up solutions to some quasilinear parabolic equation, 2015 NTS Workshop on Applied Mathematics, 2015年3月6日, 「Tamsui (台湾)」
- ② 名和 範人, Nonlinear Schrödinger equations and Nelson diffusions, 北陸応用数理研究会, 2015年2月21日 「金沢大学サテライトキャンパス(石川県・金沢市)」
- ③ 石渡 哲哉, Motion of polygonal curves by crystalline curvature flow, 日本数学会応用数理学分科会スペシャルセッション移動境界問題の数理解析 「広島大学(広島県・東広島市)」
- ④ Tetsuya Ishiwata, Motion of polygonal curves by area-preserving crystalline curvature flow, 2nd Slovak-Japan Conference on Applied Mathematics, 2014年9月16日 「Cerova vrchovina (Slovakia)」
- ⑤ 名和 範人, Nonlinear Schrödinger equations and Nelson diffusions, 第5回「ハミルトン系とその周辺」研究集会, 2014年5月29日 「金沢大学サテライトプラザ(石川県・金沢市)」
- ⑥ 石渡 哲哉, 外力付きクリスタライン曲率流の解の挙動について, Joint Workshop on Pure and Applied Mathematics, 2013年11月1日 「東北大学(宮城県・仙台市)」
- ⑦ Tetsuya Ishiwata, Behavior of polygonal curves by crystalline curvature flow, Workshop on Free Boundaries in Laplacian Growth Phenomena and Related Topics, 2013年10月15日 「東北大学川井ホール(宮城県・仙台市)」
- ⑧ Tetsuya Ishiwata, Structure preserving finite difference scheme for the Landau Lifshitz equation, The 38th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 2013年8月21日 「北海道大学(北海道・札幌市)」
- ⑨ Hayato Nawa, Nelson diffusions and Nonlinear Schrödinger equations, UVic One Day Seminar on Dispersive PDEs, 2013年3月9日 「Victoria (Canada)」
- ⑩ Tetsuya Ishiwata, Crystalline motion of spiral-shaped polygonal curve with a tip motion, International Conference on Free Boundary Problems, 2012年6月13日 「Chiemsee (Germany)」
- ⑪ 名和 範人, Nelson 拡散過程と非線形 Schrödinger 方程式, RIMS 共同研究「偏微分方程式の背後にある確率過程と解の族が示す統計力学的な現象の解析」2011年12月21日 「京都大学数理解析研究所(京都府・京都市)」
- ⑫ 名和 範人, 非線形 Schrödinger 方程式が記述する世界 -変分構造, 特異点, 基底状態 -, 研究集会「乱流現象及び非平衡系の多様性と普遍性」2011年11月11日 「九州大学応用力学研究所(福岡県・春日市)」

- ⑬ T. Ishiwata, Behavior of polygonal curves by crystalline curvature flow, Workshop on Nonlinear Partial Differential Equations, 12月11月3日「上海（中華人民共和国）」

〔図書〕（計0件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計0件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等
なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

名和 範人 (NAWA, Hayato)
明治大学・理工学部・教授
研究者番号：90218066

(2) 研究分担者

石渡 哲哉 (Ishiwata, Tetsuya)
芝浦工業大学・システム工学部・教授
研究者番号：50334917

(3) 連携研究者

なし

(4) 研究協力者

Gadi Fibich
Tel Aviv University・教授

Catherine Sulem
University Tronto・教授