科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　研究成果報告書

平成 ２６ 年　６ 月　２ 日現在

機関番号：３４３１５
研究種目：挑戦的萌芽研究
研究期間：2011～2013
課題番号：２３６５４０５６

研究課題名（和文）反対称なマリアバン解析の基礎理論の構築

研究課題名（英文）Foundations of an anti-symmetric version of Malliavin calculus

研究代表者
赤堀　次郎（Akahori, Jiro）

立命館大学・理工学部・教授

研究者番号：５０３０９１００

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,400,000円、（間接経費）　720,000円

研究成果の概要（和文）：本研究プロジェクトでは，反対称バージョンの「マリアバン解析」を構築することを課題としていた．それに関して得られた成果は次の3点である．まず，本研究の出発点となったタウ関数の確率論的表示に関しては，これまでのKdV階層に関する結果を大きく拡張してKP階層のタウ関数の確率論的表示を得た．また，Wiener空間上のクリフォード代数の構成については現在投稿準備中であり，また，その表現に基づくWiener空間上の"フェルミオン"のボゾン化写像の確率論的構成についても投稿準備中である．これらの知見に関わって数理ファイナンスにおける金利の期間構造の記述とソリトンの関係についての興味深い結果が得られた．

研究成果の概要（英文）：This project aimed to provide foundations to an anti-symmetric version of Malliavin calculus. As outputs, we obtained the following mathematical results. The first is that we have succeeded to obtain a probabilistic representation of tau functions of KP hierarchy, which fully extends the previous results on KdV one. The second is that we constructed a representation of Clifford algebra on Wiener space. Based on it, we also succeeded to construct a probabilistic Bosonization, which is the third of our main contributions in this project. Other than these, we have also obtained an interesting result on a relation between solitons of KdV equation and the term structure of interest rates in mathematical finance.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：反対称マリアバン解析　クリフォード代数　フェルミオン　ボゾン化　タウ関数

１．研究開始当初の背景

KdV 方程式の(ソリトン)解の確率論的表示がウィナー2次汎関数の(分布の)ラプラス=フーリエ変換によって得られるということについては，池田信行氏，原啓介氏，谷口説男氏らによって，2000 年頃から指摘されるようになり，研究開始当初にはすでに多くの成果が報告されていた．また，小谷真一氏は，KdV 方程式の解の構成法としてよく知られている逆散乱法を確率論の立場から一般化するという著しい成果をあげていた．

申請者は，これらの研究と，数理ファインナンスにおける金利モデルのあるクラス---二次ガウス型クラス---との関係に，2005 年ごろから興味をもち，原啓介氏と共同研究をおこなった．その研究の過程で，申請者は，さまざまな具体的な量の計算を積み重ねることによって，(無限次元の)ウィナー2 次汎関数は，クリフォード代数の作用，より詳しくはその「2 次式」が成す無限次元リー環の作用によって理解されるべきだという着想にいたった．

２．研究の目的

本研究は，池田・谷口・原らによる KdV 方程式などのソリトン解の確率論的表示に対して，反対称版のマリアバン解析とよぶべき理論を構築し，その統一的な構成・理解を目指すものである．

より具体的にはクリフォード代数の表現をウィナー汎関数の空間に構成し，その表現論的特性を駆使して佐藤グラスマン多様体をウィナー空間上に実現し，それを通じて確率面積などのウィナー2 次汎関数が定める無限次元行列式の特性を理解し、さらにこの表現から作られたアフィンリー環の作用から得られる佐藤グラスマン多様体と池田・谷口・小谷らによるソリトン解とが同一のものであるかどうかを決定するということを研究の究極の目的とする．

３．研究の方法

ここで目的の一つとしているウィナー(汎関数の)空間でのクリフォード代数の表現の構成は、よくしられているハイゼンベルグ代数のウィナー汎関数の空間上での表現の構成（対称フォック空間としての特徴付け)とパラレルなものであるが，対称な場合と異なり，保測変換のカテゴリーでは異なる基底間の表現の同値性が成り立たない．より詳しくいうと，次のようになる：

$ (W:= C[0,1], \mu) $を Wiener 空間とする．Wiener-Chaos 展開によって，同型 $ \pi_0: L^2 (W,\mu) \simeq \oplus_n L^2 (\Delta_n) $ が構成できる．ここで $ \Delta_n := \{ (t_1,\cdots, t_n) \in [0,1]^n : t_1 \leq \cdots \leq t_n \} $である．この同型から，$ L^2 (W) $を対称なフォック空間とみなすことができるということはよく知られており，マリアバン解析やホワイトノイズ解析の基礎となっている．しかし，同じ Wiener-Chaos 展開がクリフォード代数の表現を誘導することは，P.A Mayer がその著書「Quantum Probability for Probabilists」で指摘しているが，あまり確率論研究者の注目を集めては来なかった．我々の研究はまずここに着目することから始まっている．

具体的には，以下のようにしてクリフォード代数の表現を構成する：

$ f (t_1,\cdots, t_n) \in L^2 (\Delta_n) $に対して，

$ \pi_a (f) (t_1, \cdots, t_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\mathrm{sgn} \sigma }{\sqrt{n!}} f(t_{\sigma(1)}, \cdots, t_{\sigma(n)}) $

によって同型 $ \pi_a : \oplus_n L^2 (\Delta_n) \to \oplus_n\wedge^n L^2([0,1]) $ が構成できる．この最後の空間は $ L^2([0,1]) $の基底を選ぶごとに(右)$ \mathcal{A} $加群の構造が自然に入る．この構造を上の同型たちで引き戻せば，$ L^2 (W,\mu) $も(右)$ \mathcal{A} $加群となる．

なお，$\pi_a $のかわりに$ \pi_s (f) (t_1, \cdots, t_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{1}{\sqrt{n!}} f(t_{\sigma(1)}, \cdots, t_{\sigma(n)}) $ によって同型 $ \pi_s : \oplus_n L^2 (\Delta_n) \to \oplus_n \otimes_{\mathrm{sym}}^n L^2([0,1]) $が構成できる．

$ \oplus_n \otimes_{\mathrm{sym}}^n L^2([0,1]) $は対称フォック空間であり，したがってこの同型によって$ L^2 (W) $は(右) $ \mathcal{H} $ 加群となる．ここで $ \mathcal{H} $は無限次元のハイゼンベルグ代数である．

ここで述べたいずれの表現も既約であり，さらに基底の(よい)取り換えに関して「同値」であるということがいえるが，「基底の取り換え」から決まる interwining 作用素を保測変換(から誘導される確率変数の空間での変換)に限れば，後者がそれでも同値であるのに対して，前者はそうではない．すくなくとも Wiener 空間の次元が異なれば同値ではなくなることは容易に示せる．

また，このクリフォード代数の表現からアフィンリー環を構成し，そのクリフォード群の「真空の軌道」を考えることで，佐藤グラスマン多様体（タウ関数全体のなす空間)を実現できるが（三輪・神保・伊達・柏原の理論)，実はこの「タウ関数たち」は池田・谷口・小谷のそれとは単純な意味では同一では

ない．後者は本質的にガウスの 2 次式の(分布の)ラプラス=フーリエ変換から得られ，期待値としてはタウ関数の「-1/2 乗」を与える．これは三輪・神保・伊達・柏原の理論だけでは説明できない（と思われる）．申請者は，$ \mathcal{A} $加群 $ L^2 (W) $から，ウィナー2 次汎関数の定義する無限分解可能分布の空間にクリフォード群の作用を「誘導」することができればこの問題が解決されるのではないかと予想しその研究に取り組んだ．その成果については後述する．なお，この予想は同時にゼータ関数，あるいは保型形式のＬ関数の関数等式と確率面積の間の深い関係が存在することを示唆している：関数等式は，一般にテータ関数の保型性あるいはトレース公式を通じて理解されるが，この(一般化された)確率面積の「行列式表示」は，(無限次元へのリフトを与えているという意味で）それに新しい解釈を与えるものとなりうる．

３．研究成果

タウ関数の確率論的表示に関しては，これまでの KdV 階層に関する結果を大きく拡張して KP 階層のタウ関数の確率論的表示を得た．(Tau functions of KP solitons realized in Wiener space, Hidemi Aihara, Jiro Akahori, Hiroko Fujii, Yasuhumi Nitta, Bulletin of the London Mathematical Society, 45 (6): 1301-1309.)

また, Wiener 空間上のクリフォード代数の構成についても基礎的部分は完成しており(Jiro Akahori, Tomo Matsusita, Yasuhumi Nitta, Kazuhiro Yoshikawa "An antisymmetric calculus over Wiener space" preprint)，現在投稿準備中である．

また，その表現に基づく Wiener 空間上の"フェルミオン"のボゾン化写像の確率論的構成についての結果も得られ（Hidemi Aihara, Jiro Akahori "A Probabilistic Bosonization of Fermionic Wiener Functionals using Stochastic Areas" preprint）これも投稿準備中である．

さらに，これらの知見に関わって数理ファイナンスにおける金利の期間構造の記述とソリトンの関係についての興味深い結果も得られた（Hidemi Aihara, Jiro Akahori, Edouard Grenier, “Affine term structure as multi-soliton” JSIAM letters, 6, 2014,17-20）．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① 著者名：Hidemi Aihara, <u>Jiro Akahori</u>, Edouard Grenier、論文標題：Affine term structure as multi-soliton、雑誌名：JSIAM letters、査読：有、巻： 6、発行年：2014、ページ：17-20、DOI: http://dx.doi.org/10.14495/jsiaml.6.17

② 著者名：Hidemi Aihara, <u>Jiro Akahori</u>, Hiroko Fujii, Yasuhumi Nitta、論文標題：Tau functions of KP solitons realized in Wiener space、雑誌名：Bulletin of the London Mathematical Society、査読：有、巻：45、発行年：2013 、ページ：1301-1309 、DOI: 10.1112/blms/bdt056

③ 著者名：<u>Jiro Akahori</u>, Takafumi Amaba, Sachiyo Uraguchi、論文標題：An Algebraic Approach to the Cameron-Martin-Maruyama-Girsanov Formula、雑誌名：Mathematical Journal of Okayama University、査読：有、巻：55、発行年：2013、ページ：167-190

〔学会発表〕（計２件）

① 発表者名：<u>Jiro Akahori</u>、発表標題：A Modification of the Fourier Method、学会名：Stochastic Processes and Mathematical Finance、発表年月日：2014 年２月 25 日、発表場所：関西大学(大阪府)

② 発表者名：<u>Jiro Akahori</u>、発表標題：Algebraic proof of anticipative Girsanov-Maruyama Formula、学会名：The First International Workshop on Quantum Information Theory and Related Topics、発表年月日：2013 年８月 19 日、発表場所：ダナン市(ベトナム)

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

なし

６．研究組織

(1)研究代表者
赤堀　次郎（AKAHORI JIRO）
立命館大学・理工学部・教授
研究者番号：50309100

(2)研究分担者
　なし

(3)連携研究者
なし