

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 13 日現在

機関番号：10101

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2013

課題番号：23654057

研究課題名(和文)カレント・バリフォルドペアの変分法への応用

研究課題名(英文)Applications of current-varifold pair to variational method

研究代表者

利根川 吉廣 (Tonegawa, Yoshihiro)

北海道大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：80296748

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円、(間接経費) 780,000円

研究成果の概要(和文)：相分離現象を記述するために提唱された数理モデルを、過去15年ほど数学の立場から研究しているが、その解析を通じて、曲面の向付けとその曲面測度をペアにして考える観点の重要性を認識するに到った。特に平均曲率流の特異摂動問題において極限で現れる曲面はこのペアの形で得られる。この特徴を用いて、そのようなペアでなければ得られない存在定理や正則性定理を得ることができた。具体的には一般次元における、移流項付の平均曲率流の存在および正則性定理(高棹圭介氏との共同研究、論文査読中)、凸領域におけるノイマン条件付の平均曲率流の存在定理および境界条件の特徴付け(水野将司氏との共同研究、論文査読中)の成果を得た。

研究成果の概要(英文)：I have been studying a mathematical model describing phase separation phenomena for the past 15 years. Through the analysis of such model, I realized the importance of a viewpoint to consider surface orientation and surface measure as a pair. In particular, I obtain such a pair as a limiting object when I consider a singular perturbation problem of mean curvature flow. Using this characteristic, I am able to obtain some existence and regularity theorems. The examples of my theorems are existence and regularity theory of mean curvature flow with transport term (joint work with Keisuke Takasao, in review) and existence theorem and characterization of boundary condition of mean curvature flow on a convex domain with Neumann condition (joint work with Masashi Mizuno, in review).

研究分野：大域解析学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：変分問題 相分離 平均曲率流 幾何学的測度論

### 1. 研究開始当初の背景

界面を含む変分問題は、プラトール問題などの幾何解析学に動機付けられた問題、そしてステファン問題などの物理現象に動機付けられた自由境界問題に現れ、理工学的に興味深い。これらの解析を行うにあたり、まず定常の最小化問題、そして非定常問題または不安定な定常解の解析を行うのが常道である。界面エネルギー最小化問題において重要なのはエネルギーの下半連続性であり、有界変動関数の理論などによって最小解の存在が示される。一方、準安定的または有限モース指数を持つような解の存在および正則性は、極めて簡単な設定においてもほとんど何も知られていないのが現状である。つまり界面エネルギー最小性がなければ今までの枠組みでは重要かつ簡潔な設定においても界面問題においては適切な理論の枠組みがほとんど無いということである。また同様に、平均曲率流の問題においても、安定性の概念をどのように考えるか、またどのような正則性理論が構成できるかは明らかになっていない。私は近年、相分離界面の問題を様々な視点で研究しているのであるが、その枠組みでは「向き付けされた曲面(カレント)」と「界面エネルギー測度(バリフォールド)」のペアが自然に現れ、界面はより良い正則性を持つことを見出した。特にそれが顕著に現れた結果として、雑誌論文では「相分離に現れる安定的な  $n$  次元極小曲面は  $n < 7$  の場合、滑らかである」ことを示している。これは界面問題においては2つの概念をペアにして考える事が自然であり、また界面エネルギー最小性が無くても安定性があれば正則性が保証される枠組みがあることを示している。

### 2. 研究の目的

表面張力を伴う変分問題において、界面エネルギー最小問題は方法論としてかなりの部分出来上がった理論となっている一方、一旦最小性がなくなると途端に理論や方法論

がなくなってしまうのが現状である。特に大域的には不安定であるが局所的には安定性を持つような解の総合的理解は、変分法分野で大きな展開をもたらす可能性のある方向性である。また、時間発展問題に目を向けると、さらに大きな空白が広がっている。相分離関係の変分問題では、自然に不安定性を持つような界面の解析や時間発展問題の解析も行われており、その中の有力な方法論としてカレント・バリフォールドペアの枠組みを着想するに至り、またその枠組みで強力な正則性理論を見出すことを大きな目的とする。その前段階として、安定性などが無い時間発展問題である平均曲率流の正則性定理や存在定理の構築もこの研究の一環として捉えて取り組む。

### 3. 研究の方法

カレント・バリフォールドペアの枠組みでの局所安定的な極小曲面の正則性理論は構成できているので、そのような性質をもつ界面の構成方法を構成する必要がある。安定的な極小局面の構成については、ある程度 Pitts の証明が参考になる部分もあり、成果を得る可能性は高いと考えられるため、その理解にまずは取り組む。また時間発展問題に関しては動的な意味で局所的に安定な弱解の構成が必要である。これらのため、Brakke の平均曲率流の構成の理解および新しい証明方法の開発に取り組む。これらには極めて高度の変分法、非線形偏微分方程式、幾何学的測度論などの知識と力量が必要である。共同研究を行っている Wickramasekera は幾何学的測度論の特に安定的極小曲面の正則性理論に関する国際的に卓越した若手研究者であり、その協力を仰ぐ。一方、私は相分離問題から動機付けされた界面問題に関して様々な結果を出しており、他にポストドクや大

大学院生と協力することで研究を行っていく。

#### 4. 研究成果

##### (1) 安定的な相分離界面の正則性

相分離現象を表わす簡潔な数理モデルの、van der Waals - Cahn - Hilliard のエネルギーの安定解を考える。界面厚みを表わすパラメータを0に近づけたとき、その極限界面は安定的な極小曲面であることが予想されるが、雑誌論文では前述したように次元が7までであれば、滑らかな安定的な極小曲面になることを証明した。また次元が8以上であれば、高々次元-8の次元の閉特異点集合があることも示した。この正則性は最小面積曲面と同じタイプの正則性の結果であり、安定性という最小性よりもずっと弱い条件化でも同じ正則性が得られたという面で興味深いとともに、滑らかな曲面で近似が可能である場合の特別な正則性定理としても興味深い結果である。

##### (2) 平均曲率流の存在および正則性

前述の相分離エネルギーの時間発展問題、正確には勾配流を考える。エネルギーは相分離界面測度であるため、その勾配流は平均曲率流を近似することが予想されるが、これら予想を厳密に証明することによって、移流項付の平均曲率流の存在および正則性理論を構成した。これは高棹圭介氏との共同研究であり、査読中である。結果としてその存在が示される界面はまさにカレントとバリフォールドのペアとなっており、特にその非自明性や、初期時刻における正則性を示すためにはこのペアであることが暗に重要となっている。また同じ方向性として、凸領域においてノイマン条件の下、勾配流の特異摂動極限が平均曲率流になることを水野将司氏と共同で示した。この後者の興味深い点は、一般化された枠組みで考えた平均曲率流のノイマン条件をどのように定義するか、という点が明らかになったことである。これをきっかけ

にして境界付近における平均曲率流の正則性理論の構成をさらに考えるきっかけとなっている。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

Chun Liu、佐藤規文、利根川吉廣、Two-phase flow problem coupled with mean curvature flow、Interfaces and Free Boundaries、査読有、14 巻、2012 年 185-203 DOI: 10.4171/IFB/279

利根川吉廣、Neshan Wickramasekera、Stable phase interfaces in the van der Waals-Cahn-Hilliard theory、Journal für reine und angewandte Mathematik、査読有、668 巻、2012 年、191-210

[学会発表](計 6 件)

2014/3/16、利根川吉廣、平均曲率流の正則性理論について、日本数学会 2014 年度年会函数方程式分科会特別講演、学習院大学

2013/12/8、利根川吉廣、On singular perturbation limit of the Allen-Cahn equation, 2013 SIAM conference on Analysis of PDE, Lake Buena Vista, アメリカ合衆国

2013/10/10、利根川吉廣、Existence and regularity of mean curvature flow with transport term, ERC-Workshop on Geometric Measure Theory, Analysis in Metric Spaces and Real Analysis, De Giorgi Center, イタリア

2013/3/21、利根川吉廣、一般化された極小曲面や平均曲率流の正則性理論について、日本数学会 2013 年度年会総合講演、京都大学

2012/7/2、利根川吉廣、A local regularity theorem for weak mean curvature flow, Conference `Geometric measure

theory', MPI GoIm, ドイツ

2012/6/15, 利根川吉廣、Existence and regularity of mean curvature flow via Allen-Cahn equation, 12th International Conference on Free Boundary Problems: Theory and Applications, Chiemsee, ドイツ

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~tonegawa/toppagejp.htm>

6 . 研究組織

(1)研究代表者

利根川 吉廣 (TONEGAWA, Yoshihiro)

北海道大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：80296748

(2)研究分担者

該当なし

(3)連携研究者

該当なし