

平成 26 年 6 月 13 日現在

機関番号：10101

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2013

課題番号：23654058

研究課題名(和文) 完全非可積分系の無限次元特異点論構築と特異モーション・プランニング問題への応用

研究課題名(英文) The construction of infinite dimensional singularity theory of completely non-integrable systems and its applications to the singular motion-planning problem

研究代表者

石川 剛郎 (Ishikawa, Goo)

北海道大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：50176161

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円、(間接経費) 810,000円

研究成果の概要(和文)：制御系のうち、ジェネリックな多項式アフィン制御系について、特異パスの一般的性質を考察し成果を得た。さらに、G2 対称性を持つ具体的な制御系(エンゲル・ヒルベルト系)に対して、特異パスの特徴付けが得られた。さらに、システムの従属性に関して、従来の結果を覆す新しい知見が得られた。これらの結果を用いて、特異パスを用い、任意のパスの近似問題、さらにモーション・プランニングの実際問題への応用についても知見を得ている。以上の成果はすべて論文執筆し出版予定、投稿済み、あるいは、研究期間終了後になるが、論文にまとめる予定である。

研究成果の概要(英文)：For generic polynomial control-affine systems, we have several results on the general properties that singular paths possess. We have the characterization of singular paths for the G2 Cartan systems, which are important also in classical differential geometry. We have studied the approximation problem of arbitrary path by a singular path and several ideas on the applications to singular motion-planning problem. We have analyzed the singularity theory of mappings on infinite dimensional manifolds associated to completely non-integrable systems and applied to concrete singular motion-planning problems. From the viewpoint of infinite dimensional sub-Riemannian geometry, we have tried to formulate the basic theory on singular points of mapping spaces with constraints. Moreover we have the new insights on the dependence of systems of vector fields, which will defy known results.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：特異トラジェクトリ 制御系 終点写像

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 制御理論では、状態空間の2点、 $A$  の状態から  $B$  の状態への拘束条件を満たすパスの中で、与えられた汎関数（長さ関数、エネルギー関数や時間関数など）を最小、あるいは極小にするパス（測地線）の存在、その性質、具体的構成などを問題とする。したがって、拘束条件付きの変分問題の解明が中心となるが、このとき、終点写像(end point mapping)の特異性が重要となる。接触構造や Engel 構造のような、ブラケット生成的（ヘルマンダー条件を満たす）完全非可積分な微分式系によって、問題が満たすべき拘束条件を記述でき、したがって、このような非可積分な幾何学的構造が制御理論では大きな役割を果たす。この場合、微分式系が階数2の場合と階数3以上の場合では、終点写像の構造が全く異なることが近年知られることとなり、階数3の場合の終点写像の特異性を解明する手がかりができてつある。

(2) 本課題は、幾何学の制御理論への応用を目的としているが、特にモーション・プランニング問題への応用を目指す。モーション・プランニング問題とは、状態  $A$  から状態  $B$  への（拘束条件を度外視した）与えられたパスを、拘束条件を満たすパスにより近似する問題である。“理想的な動きを現実的な動きにより精度付きで近似する”のである。たとえば、ロボットを人間と同じように動かしたい、そういう場合に必要となる問題である。このとき、問題に付随する「エントロピー」や「複雑さ(complexity)」といった量を評価することが必要となる。通常は、拘束条件を満たすパスとしては、正則なものを対象としているが、終点写像の特異パスで近似することにより、よりよい評価を得ようとするのが応用上の目的である。その基礎としての終点写像の無限次元特異点論が必要となるのである。

## 2. 研究の目的

- (1) 完全非可積分系に付随する無限次元多様体上の写像の特異点を組織的に分析する方法を構築し、それを具体的な特異モーション・プランニング問題、すなわち、工作機械・ロボット等に、こちらがさせたい動き（状態空間上のパス）を、現実の拘束条件のもとで許容される動きによっていかに近似できるか、そのエントロピーや複雑さなどの量を、許容パス空間が特異性を持つ場合に評価する問題へ応用する。その応用を通し、一般の拘束条件付きの写像空間の特異点に対する基礎理論、普遍的な指導原理を確立することを目指す。
- (2) 無限次元特異点のパターン収集と分類。有限次元近似と表現から無限次元特異点を観る。
- (3) 写像空間の相体分割の基礎理論の確立。方法としての有限次元特異点論から無限次元特異点を捉える。
- (4) 特異モーション・プランニング問題への応用。無限次元特異点論を利用して得られるモデルを具体的な制御問題へ応用する。

## 3. 研究の方法

- (1) 本研究課題の基調の一つである完全非可積分系の終点写像の特異性については、文献 Y. Chitour, F. Jean, E. Trelat, Genericity results for singular curves, J. Differential Geom., 73-1 (2006), 45-73. により、その系の階数が2の場合と3以上の場合について状況が大きく変わることが見い出されている。まずその違いの原因を、終点写像の特異性の観点から再解明する。この状況に基づいて、関連する国内外の研究者と情報交換する。
- (2) 本研究課題のもう一つの基調のある、モーション・プランニング問題への特異点論の応用については、J.-P. Gauthier, V. Zakalyukin, On the motion planning problem, complexity, entropy, and nonholonomic interpolation, J. Dyn. Control Syst. 12-3 (2006), 371-404.

により、すでに研究が開始されているが、本課題研究の視点である特異モーション・プランニング問題については、先攻する研究は見当たらない。当該研究の専門家であるJ-P. Gauthier 氏と詳細に情報交換する予定であり、その研究情報を基に、さらに計画を緻密化していく。

(3) 無限次元特異点のパターン収集と分類のために、日本各地、および世界各地にいる関連分野の専門家との情報交換、研究調査連絡を行う。

#### 4. 研究成果

(1) 制御系のうち、ジェネリックな多項式アフィン制御系について、特異パスの必ず持つ一般的性質を考察し成果を得た。さらに、 $G_2$  対称性を持つ具体的な制御系（いわゆるエンゲル・ヒルベルト系）に対して、特異パスの特徴付けを得ることができた。研究成果は、出版した論文 *Singularities of Tangent Varieties to Curves and Surfaces*, および *Tangent varieties and openings of map-germs*, の内容の一部に反映されていると共に、現在、国際的専門雑誌に投稿中の論文: G. Ishikawa, Y. Machida, M. Takahashi, *Singularities of tangent surfaces in Cartan's split  $G_2$ -geometry*, preprint (submitted). (プレプリントは、Hokkaido University Preprint Series in Mathematics #1020 で公開中) の内容の一部が本課題研究と関係している。

(2) 古典的な微分幾何学でも重要な  $G_2$  カルタン系に関して、その特異パスの特徴付けを得た。この成果は本課題研究における意義を超えた課題にも関係する成果であると捉えている。また、海外の研究集会において成果発表を行った。

(3) これらの得られた結果を背景に、特異パスを用いた任意のパスの近似問題を考察し、

特異モーション・プランニングの実際問題への応用についても知見を得た。また、完全非可積分系に付随する無限次元多様体上の写像の特異点を組織的に分析する方法を構築し、それを具体的な特異モーション・プランニング問題、すなわち、工作機械・ロボット等に、こちらがさせたい動き（状態空間上のパス）を、現実の拘束条件のもとで許容される動きによっていかに近似できるか、そのエントロピーや複雑さなどの量を、許容パス空間が特異性を持つ場合に評価する問題への応用を考察した。

(4) その応用を通して、一般の拘束条件付きの写像空間の特異点に対する基礎理論、普遍的な指導原理を確立する準備を行うことができた。このような成果を基に、特異パスに関して、時間最短問題、コスト最小問題との関係から、その応用可能性が明確に把握できている段階まで十分に達したので、この特異パスの性質を用いた、任意のパスの近似問題、さらにモーション・プランニングの実際問題への応用できるようになった。

(5) 一般の拘束条件付きの写像空間の特異点に対する基礎理論について、無限次元のサブリーマン幾何学などとの関連から定式化を試みた。さらに、システムの従属性に関して、従来の結果を覆す新しい知見が得られた。以上の成果はすべて論文執筆し出版予定、投稿済み、あるいは、研究期間終了後になるが、論文にまとめる予定である。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 5 件)

1 G. Ishikawa, Y. Kitagawa, W. Yukuno, Duality of singular paths for (2,3,5)-distributions, to appear in *Journal of Dynamical and Control Systems*. 査読有。掲載確定。

DOI: 10.1007/s10883-014-9216-9

Goo Ishikawa, Tangent varieties and openings of map-germs, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B38 (2013), 119--137. 査読有 .  
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu-j.html>

3 Goo Ishikawa, Singularities of tangent varieties to curves and surfaces, Journal of Singularities, 6 (2012), 54--83. 査読有 .

DOI: 10.5427/jsing.2012.6f

4 Goo Ishikawa, Generic bifurcations of framed curves in a space form and their envelopes, Topology and its Applications, vol.159 (2012), 492--500. 査読有 .  
<http://www.sciencedirect.com/science/journal/01668641/159/2>

5 G. Ishikawa, Y. Machida, M. Takahashi, Asymmetry in singularities of tangent surfaces in contact-cone Legendre-null duality, Journal of Singularities, vol.3 (2011), 126--143. 査読有 .  
<http://www.journalofsing.org/volume3/index.html>

〔学会発表〕(計 2 件)

1 石川剛郎, 幾何学的制御理論から見た Cartan 分布の特異パス双対性 24 September 2013 年 9 月 24 日, 日本数学会秋季総合分科会, 愛媛大学(松山市), 日本 .

2 Goo Ishikawa, Singularities of Tangent Surfaces in Cartan 's Split G2-geometry, The V-th International Conference of Differential Geometry and Dynamical Systems (招待講演), 2012年08月30日, Callatis High-School, Mangalia (Romania).

6 . 研究組織  
(1)研究代表者

石川 剛郎 (Ishikawa, Goo)  
北海道大学・大学院理学研究院・教授  
研究者番号 : 50176161

(2)研究分担者  
なし

(3)連携研究者  
なし