

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 5 月 18 日現在

機関番号：11301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2014

課題番号：23654059

研究課題名(和文)非局所相互作用系と質量輸送保存則の相関探索

研究課題名(英文)Correlation research for non-local interaction system and the mass transport conservation law

研究代表者

小川 卓克(Ogawa, Takayoshi)

東北大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：20224107

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：移流拡散方程式により記述されるモデルは典型的な質量輸送構造を持ち、非局所相互作用系の一つとして理解される。本研究では2次元・3次元の半線形移流拡散系の解の大域的挙動を研究し加えて退化型移流拡散方程式の弱解の大域的挙動を明らかにした。ことに空間変数2次元の場合に時間大域的な解の振る舞いを初期条件の総質量が対応する臨界型Sobolev不等式の最良定数である 8π によって分類されることを、空間遠方の付加条件なしに証明した。また非線形分散型問題と類似の解の大域構造を臨界指数のあいだの指数について分類した。これにより大域的分変構造が非線形分散型のそれと類似していることを明らかにした。

研究成果の概要(英文)：Models described by drift-diffusion equations having a typical mass transport structure, it is understood and classified as one of the non-local interaction system. In this research, we consider the global behavior of the solution to a semi-linear drift-diffusion system in two and three-dimensional cases. In addition, we also study a system of degenerate drift-diffusion equations and make it clear the global behavior of the weak solution. Furthermore, we find the global structure of the solutions are quite similar to the one of the nonlinear dispersive equations and between the critical exponents, we classified the global behavior of the solution and find the threshold value of the global existence.

研究分野：実解析学・応用解析学

キーワード：移流拡散方程式 質量輸送問題 非局所的相互作用 非線形偏微分方程式論 時間大域解 有限時刻爆発 不等式の最良定数 閾値

1. 研究開始当初の背景

スモルコフスキー・ポアソン方程式や移流拡散方程式、渦度を記述するナビエ・ストークス方程式など、非局所相互作用を持つ問題では系の挙動が空間遠方の解の性質により大きく影響される。ことに移流拡散方程式に代表される保存系の初期値問題の研究は、半導体の物性理論、数理生物学の動力学、あるいは天体物理における大規模古典力学系の平均場モデルとして個別に現れ、非局所性という特徴的な性質が、これらのモデルの様々な多様性と普遍的を誘導し、豊富な興味深い数理を内包している。

2. 研究の目的

問題の記述にはいくつかの形式があり、走化性粘菌のダイナミクスモデル、半導体素子設計におけるもっとも基礎的な方程式、ガス状星雲間の重力相互作用を行う天体のダイナミクス中性子星の収縮と崩壊におけるモデルといった生物学、物理学、天文学の多様な問題と関連している。

質量輸送問題の一つとして非局所系のダイナミクスを理解し、そこに(準)完全可積分構造、特に非線形シュレディンガー方程式で記述される構造が背後に働いている可能性を探索することが主な目的である。これまでの重要な成果として、これらの系の安定性、不安定性が初期密度の総質量すなわち全質量によって分類できる場合があることが知られていた。初期値の総質量がある敷居値を上回ると、系は不安定となり、有限時間内に特異点を発生して、その後の時間発展を許さなくなる。これはタマホコリカビの例に照らせば、カビが胞子を作る過程で密度が一定以上に達する必要があることに対応する。本研究ではこうした非局所形における解構造と非線形分散型方程式でみられる大域解の存在閾値との関連を探索し、解析学的に定量的な評価を含む大域的な解の構造についての関連性を探ることにある。

3. 研究の方法

分担者と研究代表者が、各自独自の視点で研究を進め密接に研究打ち合わせを行うことに加え、様々な研究集会に出席し情報を収集することにより進める。また小規模のワークショップを開催して詳細な数学的証明の技法や背景、非線形分散構造との関連性を検討する。

4. 研究成果

研究代表者の小川は分担者の永井と共同で、2次元臨界型移流拡散方程式の全空間での初期値問題に対して最小の空間遠方での重み条件の下で、時間大域解の存在のための初期総質量の閾値 8 を同定し、さらに閾値そのもの場合の時間大域解の存在を示した。また分担者の永井は重みを一切置かない場合の閾値以下の時間大域解の存在を証明した。これらにより2次元ユークリッド空間での初期値問題の大域的解の挙動は質量有

限の枠組みでほぼ完全に分類された。

一方、小川は協力者の小林孝行(阪大基礎工)と共同で、圧縮性ナビエ・ストークス・ポアソン流から零緩和時間極限により移流拡散方程式の主要部を取り出す特異極限を次元と断熱指数に対するある仮定の下で示した。これにより半導体モデルの流体力学モデルから半導体古典モデルが厳密に得られることが高次元に対しても明らかになった。研究代表者の小川は、水野将司(日大理工)と共同で、退化移流拡散方程式の解のヘルダー連続性を証明し、質量臨界指数を持つ退化ケラー・シーゲル方程式の時間無限遠での漸近挙動と漸近形状がポアソン型方程式の特解であるところのパーレンブラット解に漸近収束することを、収束次数を含めて証明した。

分担者の黒木場は2次元ユークリッド空間における連立移流拡散方程式多成分系の時間大域可解性と有限時刻での解の爆発を証明した。関連して代表者の小川は分担者の黒木場と共同で、同様の連立系に対する臨界重み付き空間での可解性をプレジス・ガローエの不等式を改良して証明した。また高次元の移流拡散方程式系に対する有限時刻での爆発の十分条件を与えた。また、小川は岩濤司(大阪市大理)、瓜屋航太(東北大大理)らと共同で非線形シュレディンガー方程式の連立系の時間大域挙動において質量共鳴による挙動の変化や時間局所適切生について臨界空間を同定するなどの成果を得た。

代表者の小川はソボレフ臨界指数を持つ移流拡散方程式の時間大域的可解性と有限時刻での爆発の臨界閾値をソボレフ臨界指数を持つ非線形楕円型の特解(タレンティ解)により顕わに与えた。また関連して中川和重(福島大共生システム理工)らと共に退化移流拡散方程式のソボレフ臨界と質量臨界のあいだの非線形指数に対しても大域解の存在と有限時刻での爆発に対する閾値をハーディー・リトルウッド・ソボレフの不等式の最良定数を与える関数により決まる定数で与えた。これは関連する非線形シュレディンガー方程式における大域の変分構造とほぼ同一の構造を移流拡散系が保つことを示したことになる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

(雑誌論文)(計 17 件)(すべて査読有)

[1] A. Kimijima, K. Nakagawa, T. Ogawa, Threshold of global behavior of solutions to a degenerate drif-diffusion system in between two critical exponents, Calc. Vals. P.D.E., (2015) in press. (査読有)

[2] T. Nagai, T. Ogawa,

Global existence of solutions to a parabolic-elliptic system of drift-diffusion type in R^2 , Funkcial. Ekvac. (2015), in press. (査読有)

[3] M. Kurokiba, T. Ogawa, Two dimensional drift-diffusion system in a critical weighted space, Differential Integral Equations, **28** (2015), 758-776. (査読有)

[4] T. Ogawa, K. Uriya, Final state problem for a quadratic nonlinear Schrödinger system in two space dimensions with mass resonance, J. Differential Equations, **258** (2015), 483-503. (査読有)
DOI:10.1016/j.jde.2014.09.022

[5] T. Iwabuchi, T. Ogawa, Ill-posedness issue for nonlinear Schrödinger equation with the quadratic nonlinearity for low dimensions, Trans. Amer. Math. Soc., **367** (2015), 2613-2630. (査読有)
DOI:10.1090/S0002-9947-2014-06000-5

[6] M. Mizuno, T. Ogawa, Regularity and asymptotic stability for the Keller-Segel system of degenerate type with critical nonlinearity, J. Math. Sci Univ. Tokyo, **20** (2013), 1-59. (査読有)

[7] T. Kobayashi, T. Ogawa, Fluid mechanical approximation to the degenerated drift-diffusion and chemotaxis equations in barotropic model, Indiana Univ. Math. J., **62** (2013), 1021-1054. (査読有)

[8] T. Ogawa, K. Uriya, Modified wave operator for the quadratic nonlinear Schrödinger system in two space dimensions, RIMS Kokyuroku Bessatsu, **B42** (2013), 153-170. (査読有)

[9] T. Ogawa, The degenerate drift-diffusion system with the Sobolev critical exponent, Disc. Conti. Dynam. System Ser S., **4** no. 4, (4) (2011), 875-886. (査読有)

[10] T. Nagai, T. Ogawa, Brezis-Merle inequalities and application to the global existence of the Keller-Segel equations, Comm. Contemporary Math., **13** no. 5 (2011), 1-18. (査読有)
DOI: 10.1142/S0219199711004440

[11] T. Ogawa, H. Takeda, Large time behavior of solutions for a system of nonlinear damped wave equations, J. Differential

Equations, **251** (2011), 3090-3113. (査読有)
DOI:10.3934/cpaa.2013.12.2627

[12] J. Lopez-Gomez, T. Nagai, T. Yamada, The basin of attraction of the steady-states for a chemotaxis model in R^2 with critical mass, Arch. Ration. Mech. Anal., **207** (2013), 159-184. (査読有)
DOI: 10.1007/S00205-012-0560-1

[13] T. Nagai, Convergence to self-similar solutions for a parabolic-elliptic system of drift-diffusion type in R^2 , Adv. Differential Equations, **16** (2011), 839-866. (査読有)

[14] T. Nagai, Global existence and decay estimates of solutions to a parabolic-elliptic system of drift-diffusion type in R^2 , Differential Integral Equations, **24** (2011), 29-68. (査読有)

[15] M. Kurokiba, T. Suzuki, R. Takahashi On a perturbed system of chemotaxis, II International Journal of Pure and Applied Mathematics, **92** (2014) 305-334, (査読有)
DOI: 10.12732/ijpam.v92i3.1

[16] M. Kurokiba, Existence and blowing up for a system of the drift-diffusion equation in R^2 , Differential Integral Equations, **27** (2014), 425-446. (査読有)

[17] E. Espejo, M. Kurokiba, T. Suzuki, Blowup threshold and collapse mass separation for a drift-diffusion system in space-dimension two, Comm. Pure Appl. Anal., **12** (2013), 2627-2644. (査読有)
doi:10.3934/cpaa.2013.12.2627

(学会発表) (計 51 件)

[1] 小川 卓克, 「熱方程式の最大正則性とその応用」, 函館における偏微分方程式集中ワークショップ--第一回北海道-東北偏微分方程式論コンソーシアムセミナー--, 2014年4月5日~7日, はこだて未来大学(函館市).

[2] 小川 卓克, 「変数係数放物型方程式の L^1 最大正則性」, 秋田における偏微分方程式集中ワークショップ--第二回北海道-東北偏微分方程式論コンソーシアムセミナー--, 2014年7月11日~13日, 秋田大学(秋田市)

- [3] T. Ogawa, 「End-point maximal L^1 regularity for parabolic equations and optimality」, ``9th East Asia Partial Differential Equations conference" 2014年7月28日~31日, Hotel Nikko Nara (奈良市).
- [4] T. Ogawa, 「Maximal L^1 Regularity for the Cauchy Problem of Parabolic Equations」, 国際研究集会「Mathematical Theory of Gas and Fluids and Related Applications」, 2014年8月10日~12日, Chung-Ang University (Korea).
- [5] T. Ogawa, 「Threshold for the large time behavior of solutions to degenerate drift-diffusion system in between critical exponents」, 国際研究集会「Mathematics for Fluid Dynamics」, 2014年10月20日~23日, Universite de Lyon I (France).
- [6] T. Ogawa, 「Threshold for the global behavior of solution to degenerate Keller-Segel (drift-diffusion) system in between critical exponents」, 国際研究集会「Mathematical Approaches to Pattern Formation」, 2014年10月28日~31日, Tohoku University (仙台市).
- [7] T. Ogawa, 「Threshold for the global behavior of the weak solution for degenerate drift-diffusion system in between two critical exponents」, Oberseminar Angewandte Analysis, 2014年11月26日, Martin Lutar-Universitat Halle-Wittenberg (ドイツ).
- [8] T. Ogawa, 「III-posedness for quadratic nonlinear Schrödinger equations in lower dimension and related topics」, 2014年12月6日~7日, Taiwanese Mathematical Society Annual Meeting, National ChungKang University (中国).
- [9] 小川 卓克, 「Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式の最良定数と退化移流拡散方程式の大域可解性と解の挙動について」, 2014年3月6日~7日, 第7回福島応用数学研究集会, コラッセ福島(福島市).
- [10] T. Ogawa, 「Pseudo conformal structure and mass resonance for two dimensional quadratic nonlinear Schrödinger system」, Workshop for Nonlinear Partial Differential Equations in Zhejiang University, 2015年3月14日~15日, 浙江大学 (杭州市, 中華人民共和国).
- [11] T. Ogawa, 「 L^1 maximal regularity and the local existence result for the compressible Navier-Stokes-Poisson system in a critical space」, 国際研究集会「Mathematical Analysis of Nonlinear Partial Differential Equations」, 2013年11月13日~15日, Kyushu University (Fukuoka).
- [12] 小川 卓克, 「 L^1 maximal regularity and the local existence result for the compressible Navier-Stokes-Poisson system in a critical space」, 第38回 札幌における偏微分方程式研究集会, 2013年8月21~23日, 北海道大学(札幌市).
- [13] Takayoshi Ogawa, 「III-posedness for quadratic nonlinear Schrödinger equation in low dimensions」, PDE seminar, 2013年10月4日, University of California Santa Barbara (USA).
- [14] 小川 卓克, 「Existence of solution to compressible Navier-Stokes-Poisson system in a critical space and L^1 maximal regularity」, 研究集会 Liner and Nonlinear Waves, 2013年10月30日~11月2日, ピアザ淡海(滋賀県大津市)
- [15] 小川 卓克, 「Threshold for the large time behavior of solutions to degenerate drift-diffusion system in between critical exponents」, 北九州地区における偏微分方程式研究集会, 2013年11月30日, 小倉リーセントホテル(北九州市).
- [16] 小川 卓克, 「熱方程式の初期値問題の L^1 最大正則性原理の最適性について」, 日本数学会 2014年度年会 実関数論分科会, 2014年3月15日~18日, 学習院大学 (東京).
- [17] Takayoshi Ogawa, 「Maximal L^1 regularity for heat equations and application to compressible Navier-Stokes-Poisson system」, 2014年3月28日, Workshop ``Harmonic Analysis for Nonlinear Partial Differential Equations", University of California Santa Barbara (USA).
- [18] T. Ogawa, 「 L^p Dissipative Estimate for the Schrödinger Semigroup with critical singular potential」, 5th Euro-Japanese Workshop Blow-up, 2012年9月9日~14日, CIRM (Marseille-Luminy, France).
- [19] T. Ogawa, 「Existence of solution to the compressible Navier-Stokes-Poisson system and the relation with the drift-diffusion system」, Math Flow 2012 in Porquerolles, 2014年10月22日~26日, Porquerolles, (France).
- [20] T. Ogawa, 「Local existence result for the compressible Navier-Stokes-Poisson system

- in a critical case」, CAU-Kyoto workshop for PDE, 2013年2月15日～16日, Chung-Ang University (Seoul, Korea).
- [21] 小川 卓克, 「2次元非線形偏微分方程式の解の漸近挙動」, 談話会, 2012年5月21日, 東北大学 (仙台市).
- [22] 小川 卓克, 「連立非線型 Schrödinger 方程式系の係数共鳴と解の漸近挙動」, 談話会, 2012年8月3日, 室蘭工科大学 (東室蘭市).
- [23] 小川 卓克, 「Ill-posedness for quadratic nonlinear Schrödinger equation in two dimensions」, 談話会, 2012年9月28日, 愛媛大学 (松山市).
- [24] 小川 卓克, 「3次元圧縮性 Navier-Stokes-Poisson 系の臨界強解の存在について」, 北九州地区における偏微分方程式研究集会, 2012年11月23日, 小倉リーセントホテル (北九州市).
- [25] 小川 卓克, 「非局所型偏微分方程式と実補間空間および最大正則性-非線型偏微分方程式への実解析的方法-」, 九州 非線形偏微分方程式 冬の学校'12 in 神戸, 2012年12月1日～2日, 神戸大学 (神戸市).
- [26] T.Ogawa, "Global existence and blow up for a weak solution to degenerate drift-diffusion system between two critical cases", PDE seminar, 2013年3月11日, University of Sydney (オーストラリア).
- [27] T.Ogawa, "WKB approximation for nonlinear Schrödinger -Poisson system in two space dimensions", PDE seminar, 2013年3月11日, University of California Santa Barbara (アメリカ).
- [28] 永井 敏隆, 「空間2次元での単純化 Keller-Segel 方程式の時間無限大での挙動」, 偏微分方程式レクチャーシリーズ in 福岡工業大学, 2012年5月26日～27日, 福岡工業大学 (福岡市).
- [29] 永井 敏隆, 「空間2次元での単純化 Keller-Segel 方程式: 臨界ケース」, 九州関数方程式セミナー, 2012年5月11日, 福岡大学セミナーハウス (福岡市).
- [30] 永井 敏隆, 「Large-time behavior of solutions to a chemotaxis model in R^2 with critical mass」, 広島数理解析セミナー, 2012年1月27日, 広島大学 (東広島市).
- [31] 永井 敏隆, 「Dynamics of solutions to a chemotaxis model in R^2 with critical mass」, 北九州における偏微分方程式研究集会, 2011年11月26日, 九州工業大学 (北九州市).
- [32] Toshitaka Nagai, 「A parabolic-elliptic system of drift-diffusion type with critical mass in R^2 」, International Workshop on Modeling and Analysis of PDE Systems of Biological Processes, 2011年10月18日～21日, Capital Normal University (Beijing, China).
- [33] 永井 敏隆, 「関数の再配列の走化性方程式への応用」, 日本数学会秋季総合分科会 関数方程式論分科会 解析学賞受賞特別講演, 2011年10月1日, 信州大学 (松本市).
- [34] 永井 敏隆, 「A parabolic-elliptic system of drift-diffusion type in R^2 for the subcritical case, 流体と気体の数学解析」, 2011年7月6日～7月8日, 京都大学数理解析研究所 (京都市).
- [35] Toshitaka Nagai, 「A parabolic-elliptic system of drift-diffusion type with subcritical mass in R^2 」, Nonlinear Models in Partial Differential Equations, An international congress on occasion of Jes'us Ildefonso D'iaz's 60th birthday, 2011年6月14日～17日, Toledo (Spain).
- [36] Toshitaka Nagai, 「A parabolic-elliptic system of drift-diffusion type in two space dimensions for the critical mass case」, Workshop on Nonlinear Partial Differential Equations, 2011年5月9日, Universidad Complutense de Madrid, Madrid (Spain).
- [37] Masaki Kurokiba, 「On a elliptic-parabolic system describing chemotactic aggregation of two particle in R^2 」, The 4th MSJ-SI Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations, 2011年9月14日, 九州大学 (福岡市).
- [38] Masaki Kurokiba, 「On a drift-diffusion systems in R^2 」, 日独二国間研究集会 「Conference on Evolution Equations-Related Topics and Applications」, supported by JSPS (Japan) and DFG (Germany), 2012年3月19日, 早稲田大学 (東京).
- [39] 黒木場正城, 「On a multiple drift-diffusion system in R^2 」, 第158回広島数理解析セミナー, 2012年5月25日, 広島大学理学部 (東広島市).
- [40] 黒木場正城, 「Existence and blowing up for a system of the drift-diffusion equation in R^2 」,

第 562 回応用解析研究会, 2013 年 6 月 8 日, 早稲田大学(東京).

[41] 黒木場正城, 「Existence and blowing up for a system of the drift-diffusion equation in R^2 」, 研究集会「第 9 回非線型の諸問題」, 2013 年 9 月 6 日, 高知大学 (高知市).

[42] Masaki Kurokiba, 「Existence and blowing up for a system of the drift-diffusion equation in R^2 」, Analysis/PDE seminar, 2013 年 10 月 4 日, University of California, Santa Barbara (USA). 招待講演

[43] Masaki Kurokiba, 「Existence and blowing up for a system of the drift-diffusion equation in R^2 」, RIMS 研究集会「抽象的発展方程式の新たな役割-個々の偏微分方程式を俯瞰する観点から-」, 2013 年 10 月 21 日, 京都大学数理解析研究所(京都市).

[44] 黒木場正城, 「Existence and blowing up for a system of the drift-diffusion equation in R^2 」, PDE セミナー, 2013 年 10 月 28 日, 北海道大学(札幌市).

[45] Masaki Kurokiba, 「Existence and blowing up for a system of the drift-diffusion equation in R^2 」, 第 11 回浜松偏微分方程式研究集会, 2013 年 12 月 24 日, 静岡大学(浜松市).

[46] Masaki Kurokiba, 「Existence and blowing up for a system of the drift-diffusion equation in R^2 」, 微分方程式セミナー, 2014 年 1 月 20 日, 名古屋大学(名古屋市).

[47] Masaki Kurokiba, 「Existence and blowing up for a system of the drift-diffusion equation in R^2 」, 研究集会「Workshop on analysis in Kagurazaka」, 2014 年 1 月 25 日, 東京理科大学 (東京).

[48] 黒木場正城, 「空間 3 次元 drift-diffusion system の初期値問題に対する有限時間爆発解について」, 解析セミナー, 2014 年 5 月 24 日, 愛媛大学 (松山市).

[49] 黒木場正城, 「Two dimensional drift-diffusion system in a critical weighted space」, 日本秋季数学会総合分科会, 2014 年 9 月 28 日, 広島大学(東広島市).

[50] Masaki Kurokiba, 「Finite time blow up for a solution to system of the drift-diffusion equations in three dimensions」, 中華民国数学会, 2014 年 12 月 7 日, 国立成功大学(中国). 招待講演

[51] 黒木場正城, 「Blowing up for a system of the drift-diffusion equation in R^3 」, PDE セミナー, 2014 年 12 月 26 日, 北海道大学(札幌市).

{図書}(計 1 件)

[1] 小川 卓克, シュプリンガー現代数学シリーズ「非線型発展方程式の実解析的手法」, 丸善出版, 430 ページ, 2013 年.

{産業財産権}

出願状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年月日:

取得年月日:

国内外の別:

{その他}

ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究代表者

小川 卓克 (OGAWA Takayoshi)
東北大学大学院 理学研究科 教授
研究者番号:20224107

(2)研究分担者

永井 敏隆 (NAGAI Toshitaka)
広島大学大学院理学研究科 名誉教授
研究者番号: 40112172

(3)研究分担者

黒木場 正城 (KUROKIBA Masaki)
室蘭工業大学大学院工学研究科 准教授
研究者番号:60291837