

科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）研究成果報告書

平成25年 5月21日現在

機関番号：11301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2012

課題番号：23654060

研究課題名（和文） 動的境界条件をもつラプラス方程式の定性的性質

研究課題名（英文） Qualitative properties for the Laplace equation
with a dynamical boundary condition

研究代表者

石毛 和弘 (ISHIGE KAZUHIRO)

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：90272020

研究成果の概要（和文）：

半空間において、動的境界条件付きラプラス方程式に関連する2つの非線形問題を取り扱い、時間大域的正值解が存在するための臨界指数および小さい解が時間無限大でポアソン核の定数倍のように振る舞うことを証明した。特に、非線形性がある臨界指数以下であれば大域的正值解は存在せず、また、非線形性が臨界指数より大きい場合には、解に対する自己相似変換について不変な積分量を用いて大域解の存在条件を与え、さらに、その仮定の下、時間無限大でポアソン核の定数倍のように振る舞うことを証明した。

研究成果の概要（英文）：

We studied the large time behavior of positive solutions for the Laplace equation with a nonlinear dynamical boundary condition and for a nonlinear elliptic equation with a dynamical boundary condition, in a half space. We identified a critical exponent for the global existence of positive solutions and showed that small solutions behave like suitable multiples of the Poisson kernel.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
交付決定額	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：数理系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：動的境界条件、ラプラス方程式、ポアソン核

1. 研究開始当初の背景

動的境界条件をもつラプラス方程式の初期値問題は境界のみで発熱や化学反応がある場合に現れる数理モデルを単純化、またはある種の極限をとることによって得られる。しかし、動的境界条件の取り扱いの困難さ故に解の定性的性質の研究はほとんど為されておらず、研究の進展が望まれていた。ただ

し、最も単純な非有界領域である半空間においては、非線形動的境界条件付きラプラス方程式に対しては、1997年のH. Amann氏、M. Fila氏による正值時間大域解の存在・非存在に関する臨界指数の同定についての研究成果がある。しかし、H. Amann氏及びM. Fila氏の研究では、時間大域解の大域的漸近挙動などの解の定性的性質についての研究は行

われておらず、系統的な研究が待たれていたと考える。

一方、石毛は本研究開始当初までに、動的境界条件をもつラプラス方程式と関係が深いと想定される幾つかの非線形拡散方程式の解の時間大域挙動について幾つかの研究実績を挙げており、これらの経験に基づいて動的境界条件について詳しく研究していくことができると考えていた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、線形及び非線形動的境界条件をもつラプラス方程式の解の定性的性質を調べることである。この問題は、一般には解の存在を示すことから多くの高度な専門的知識の蓄積を必要とする問題である。ましてや解の挙動を調べるのは困難であることから、今日まで解の定性的性質を取り扱った結果はほとんどなかった。本研究では、領域が半空間の場合に特化することによって問題の本質を失わず単純化し、解の定性的性質を調べることを目的とする。

本研究で取り扱われる半空間上の動的境界条件付きラプラス方程式の初期値問題の解は、ポアソン核を用いた非線形積分方程式の解として表現できる。このため、熱核を積分核とした非線形積分方程式の解に対する詳細な結果との比較が可能になり、

- 積分核が熱核と異なる積分方程式の場合、解の定性的性質はどのように変化するのか？

という問題にも結果として取り組むことになる。これは、偏微分方程式論または実関数論に関わる重要かつ挑戦的な問題であるが、本研究はその第一歩となるべきものと考えられる。実際、熱核では時間変数と空間変数の重みが1対2であるが、ポアソン核は時間変数と空間変数の重みが同じであり、また、

時間無限大、または空間無限遠点における積分核の減衰率がそれぞれ大きく異なるため、その影響が解挙動に現れ、興味深い数学的現象が現れることが期待できる。

3. 研究の方法

半空間領域であることを利用し、ポアソン核を積分核とした非線形積分方程式に問題を帰着させる。その上で、ポアソン核のもつ良い性質を利用しながら、また、既存の熱核に対する非線形積分方程式の結果を参考にしながら

- 解の正則性および解の平滑化効果
- 時間局所解の構成
- 解の延長性について
- 正值時間大域解の存在

などの期待されるべき基本的な結果を得る。その後、時間大域解は時間無限大において、ポアソン核の定数倍のように振る舞うなど大域解の詳しい漸近挙動や解の形状についての研究を行う。特に、時間大域的な解の存在を研究する際には、方程式の持つ自己相似変換に対して不変な条件を探ることが重要である。

これらの研究は、共同研究者であるコメニウス大学(スロバキア)の M. Fila 氏、大阪府立大の川上竜樹氏と研究連絡を取りながら行い、背理法と熱核の挙動をうまく用いながら非線形の効果を線形熱方程式に取り込んだ川上氏と石毛の 2009 年の結果を応用・発展させて研究を行う。

その後、これらを発展させて、線形動的境界条件付き非線形楕円型方程式について考察を重ねて行く。

4. 研究成果

コメニウス大(スロバキア)の Marek Fila 氏、大阪府立大の川上竜樹氏と共に、半空間

において

- 非線形動的境界条件をもつラプラス方程式の時間大域解が存在するための十分条件およびその時間大域的挙動
- 線形動的境界条件をもつ非線形楕円型方程式の時間大域解が存在するための十分条件およびその時間大域的挙動

という2つの異なった非線形問題について考察した。

非線形動的境界条件をもつラプラス方程式に対して、方程式のもつ自己相似変換に対して不変な、ルベグ空間の積からなるある条件の下、解が時間大域的に存在することを示し、また、その解の正則性について研究を行った。さらに、時間大域解は時間無限大にてポアソン核の定数倍のように振る舞うことを示した。この解析は、川上竜樹氏と石毛による2009年の結果に沿って行われ、

1. 時間局所解の構成
2. 解の延長性
3. 解の正則性

を経て、背理法を用いて、時間大域解が存在するための十分条件を与えた。さらに、その解の時間大域挙動について、ポアソン核を用いて研究を行った。ただし、積分核がポアソン核であることから、ある空間変数と時間変数が同等の役割をなすところが興味深く、これは、既存の結果と差を生むと共に、困難点を与えることでもあった。また、ここで得られた時間大域解が存在するための十分条件は、最適なものである。

一方、(線形)動的境界条件をもつ非線形楕円型方程式は、解の概念の構築から始めなければならない新しい問題であった。まず、方程式を2つに分解し、方程式系の解の和として表現する。さらに、その方程式系から自

然に導入される積分方程式の解として、線形動的境界条件をもつ非線形楕円型方程式の解を定義する。この積分方程式は、動的境界条件からポアソン核が、楕円型方程式からリース核が現れ、2つ性質の異なる積分核をもつ積分方程式の解として記述される。これら性質の異なる2つの積分核は、動的境界条件付き非線形楕円方程式の解析を困難にしたが、結果として以下のような結果を得た。

1. 時間大域解の非存在に関する非線形項の指数を求めた。
2. 時間大域解が存在するための十分条件を求め、1と合わせて藤田臨界指数を同定した。
3. 初期値が小さい時間大域解が時間無限大においてポアソン核のように振る舞うことを示した。

まず、時間大域解の非存在を証明するために、我々は、ポアソン核から導かれる線形動的境界条件付きラプラス方程式の解の時間減衰評価に着目し、時間大域解が存在するための臨界指数を求めることに成功した。この研究成果は、1997年のH. Amann氏、M. Fila氏による藤田臨界指数の研究を応用することによって得られ、ポアソン核から得られる解の減衰評価を非線形項の評価に繰り返し用いることによる背理法によって導かれた。

次に、方程式のもつ自己相似変換に不変な大域解が存在するための十分条件を、積分核に付随する様々な評価を考慮しながら与えた。これらの評価には、詳細な積分核評価に基づいた複雑な場合分けを必要とするが、それらに基づき、解の先験的評価、時間局所解の構成、時間大域解の構成という順に証明を行った。これらの評価は、初期値が小さい時間大域解がポアソン核の定数倍のように振る舞うことの証明にも有効的に用いられた。

また、本研究で得られた時間大域解の存在

に関する研究業績は、半空間における非線形楕円型方程式の正值解の存在を保証するものであり、すでに知られている正值解の非存在条件が最適であることを示している。さらに、我々の結果は、発展方程式の立場から非線形楕円型方程式を扱うことを可能にするものであるため、解の構成法が既存の方法とは大きく異なる興味深い解析手法である。よって、今後、本研究で行われた解析手法は、大きく進展する可能性を十分に持っていると考えると共に、その将来性を強く期待している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計2件)

1. Marek Fila, Kazuhiro Ishige, Tatsuki Kawakami, Large time behavior of solutions of a semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition, *Advances in Differential Equations*, 査読有, 18巻, 2013年, 69-100
2. Marek Fila, Kazuhiro Ishige, Tatsuki Kawakami, Convergence to the Poisson kernel for the Laplace equation with a nonlinear dynamical boundary condition, *Communications on Pure and Applied Analysis*, 査読有, 11巻, 2012年 1285-1301
(doi:10.3934/cpaa.2012.11.1285)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石毛 和弘 (ISHIGE KAZUHIRO)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：90272020

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：