

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 19 日現在

機関番号：12608

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2014

課題番号：23654062

研究課題名(和文) プラズマ物理に現れる双曲 - 楕円型方程式系の解の時間大域構造

研究課題名(英文) Asymptotic analysis on the Euler Poisson equation arising in plasma physics

研究代表者

西畑 伸也 (Shinya, Nishibata)

東京工業大学・情報理工学(系)研究科・教授

研究者番号：80279299

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：ボーム条件下では定常解が漸近安定であることが予想されていたが、この予想を肯定的に解決した。具体的には、オイラー・ポアソン方程式に対して、ボーム条件は半空間上で定常解が存在して且つ時間的に安定であるための十分条件を与えることを証明した。さらに、時間大域解が定常解に収束する速さを求めた。あわせて数値解析で同じ問題のシミュレーションを行い、方程式の解が定常解に収束する様子を可視化した。5つのスキームを実装し比較したが、収束の速さ及びスキームの安定性の観点から、Roelによるスキームが最も優れていた。

研究成果の概要(英文)：We proved the asymptotic stability of the stationary solution to an Euler Poisson equation arising in the plasma physics under the Bohm sheath condition. We also obtained the convergence rate towards the stationary solution subject to the initial condition. In addition we made numerical experiments. Precisely, we confirmed numerically that the solution converges to the stationary solution as time tends to infinity. Here we compared several numerical schemes. In conclusion, we see that the roe scheme makes a best performance in stability of scheme and convergence speed.

研究分野：非線形偏微分方程式論

キーワード：オイラー方程式 ポアソン方程式 双曲型保存則 ボーム・シース条件 境界層

1. 研究開始当初の背景

自然界に存在する物質の90%は、プラズマで構成されると言われている。人工的な装置内では、トカマクの閉じ込め等、プラズマの性質を応用することで、最先端の研究・開発がおこなわれている。本研究課題では、自然界や人工下で存在するプラズマの理論的な解析を目的としていた。とくに、プラズマが固定壁に接触するときの形成されるシースと呼ばれる境界層の解析を第一の課題としていた。

固定壁の近傍ではプラズマ中の電子と正イオンはともに壁に流れ込むが、正イオンと比べ電子の質量は遥かに小さく早く運動し、電子が過剰に壁に到達し蓄積されるため、壁の電位は負に帯電する。この負の電位は電子を反射し、正イオンを加速させて、電子とイオンの粒子束が等しくなるようにプラズマと壁の間に電界を形成させる。この電界が形成される領域が、シースと呼ばれる境界層となる。プラズマ物理学ではシース形成の研究は1920年代に遡り、長い研究の歴史があるが、いまだ未解決な問題が数多く残されている。特に1949年には、シースが形成されるための条件として、正イオンが極超音速でプラズマ領域からシース領域に流れ込む必要があることを意味する条件が、ボームによって提案された。この条件はボーム・シース条件と呼ばれているが、その理論的な意味合いは不明確であった。工学的な応用では、装置内部にプラズマを閉じ込めて利用する核融合炉や、集積回路の加工機を設計する際にシースの解析が必要とされている。ボーム・シース条件は、オイラー・ポワソン方程式から導出されるが、その過程ではシースの数学的な定義は明確に与えられていなかった。物理実験においてシースが定常的に観測されることを考慮すれば、シースは時間的に安定なオイラー・ポワソン方程式の定常解と定義されるべきであろう。この定義に基づきボーム条件を数学的に検証すると共に、シースの形成に関する数学理論

を構築することが本研究の課題である。これまで、シースの形成を数学的に解析した研究成果は幾つか報告されていた。例えば、ソウル国立大学のHa教授等は正イオンの絶対温度が零と仮定して、シースの形成をオイラー・ポワソン方程式の自由境界問題として定式化しているが、この定式可では問題が適切になっていなかった。さらに特性曲線の方法を用いることにより時間大域可解性は議論しているが、大域解の漸近挙動などは解析されていなかった。一方、Aboroso教授等は一次元有界領域上でオイラー・ポワソン方程式を取り扱い、ボーム条件下で定常解の存在を証明していた。またオイラー・ポワソン方程式の解は時間経過と共に、この定常解に近づくことを数値的に確認していた。

2. 研究の目的

先に述べたようにプラズマが接触する固定壁周辺には、シース(鞘)と呼ばれる境界層が形成されることが知られているが、その数学的な解析を第一の研究課題としていた。私の研究室の博士課程学生であった鈴木政尋氏はボーム条件下でなくとも定常解の存在が示したが、ボームの条件は定常解の存在のための必要条件とはならないが、安定性に関しては必要条件となることが予想された。実際、ボーム条件を仮定しない場合、先に述べた、線形化したオイラー・ポワソン方程式に指数関数をかけた方程式では、スペクトルの実部が正となる。したがって、今後はボーム条件を仮定しない場合に定常解が不安定になることが予想される。以上により、ボーム条件の数学的な意味が明確となる。本研究では、さらにプレ・シースと呼ばれるシースとプラズマが遷移している領域を解析する。プレ・シースは、数学的にはオイラー・ポワソン方程式の希薄波と呼ばれる特殊な解に対応すると予想される。この予想を示すため、オイラー・ポワソン方程式の解が時間経過とともに、定常解と希薄波の重ね合わせに収束することを証明する

ことも目標とする。こうした数学的な研究に合わせて、数値解析を用いて、解の挙動を解析する。

3. 研究の方法

本研究課題で取り扱われるオイラー・ポアソン方程式系は双曲 - 楕系であり、エネルギー形式を利用した積分量の計算に加えて、線形化方程式の基本解の評価や、楕円型方程式に用いられている幾つかの不動点定理等、様々な数学的手法を組み合わせる事が必要となる。従って、こうした分野を専門とする数学者との研究交流は、研究を推し進める上で不可欠である。さらに、プラズマ現象の研究者との交流も必要となります。また、数値スキームの開発、実装を円滑に進める際には、この分野の研究者との研究交流も必須となる。その為、様々な研究集会に出席・発表を行うと共に、研究代表者自身も研究集会を主催して研究上の交流を図る。研究の主な目的は、数理モデルの時間大域構造の解明と、その数値スキームの開発であり、年度ごとに研究手法の区別はないが、概ね次の順序で研究課題に取り組む予定である。まず平成 23 年度は、モデルの漸近安定性に取り組む。成 24 年度以降はそれらを継続すると共に、一般化した双曲 - 楕円方程式系に対する研究に着手する。数理モデルの数値スキームの研究は、コンピューターを購入後、平成 24 年度以降に本格化する。

4. 研究成果

既存の研究からボーム条件下では定常解が漸近安定であることが予想されていたが、研究代表者等の研究によって、この予想は肯定的に解決された。具体的には、オイラー・ポアソン方程式に対して、ボーム条件は半空間上で定常解が存在して且つ時間的に安定であるための十分条件を与えることを証明した。この証明は、線形化されたオイラー・ポアソン方程式のスペクトルの実部は零になるため、通常の解析手法が使用できず安定

性解析は困難であった。しかし、線形化方程式に空間変数だけに依存する指数関数をかけて得られる方程式ではスペクトルの実部が負になることを発見して、空間方向に重み関数を付けたソボレフ空間上で時間大域解の構成に成功した。さらに、時間大域解が重み関数に応じた速さで定常解に収束することもあわせて証明している。以上の成果は、まず境界条件としてディリクレ条件を採用した下で証明された。その後、境界上での電位の変化がプラズマ流に依存する条件を課した下でも定常解の存在と安定性を証明した。後者の成果により、境界壁上の浮動電位を求める公式が得られる。

こうした数学的な研究成果に加えて、数値解析で同じ問題の数値シミュレーションを行い、方程式の解が定常解に収束する様子を、可視化した。数値解析ためオイラー方程式の解析には、Lax-Friedrichs スキーム、修正 Lax-Friedrichs スキーム、One-sided スキーム、Upwind スキーム、Roe スキームの 5 つのスキームを実装し比較したが、収束の速さ及びスキームの安定性の観点から、Roe によるスキームが最も優れていた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 6 件)

Shinya Nishibata, Masashi Ohnawa
Masahiro Suzuki, The mathematical justification of the Bohm criterion in plasma physics, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 64, 2015, 489-495,
<http://www.worldscientific.com/series/asp> (査読あり)

Shinya Nishibata, Masashi Ohnawa
Masahiro Suzuki, Nonlinear stability of boundary layer solutions to the Euler-Poisson equations in plasma

physics, Hypbolic Problems: Theory, Numerics, Applications, 2014, 817-822, <http://www.springer.com/gp/book/9783540757115>, (査読あり)

Tohru Nakamura, Shinya Nishibata, Energy estimate for a linear symmetric hyperbolic-parabolic system in half line, Kinetic and Related Models, AIMS on Applied Mathematics, 8, 2013, 883-892, DOI: 10.3934/krm.2013.6.883, (査読あり)

Shinya Nishibata, Masashi Ohnawa Masahiro Suzuki, Asymptotic stability of boundary layers to the Euler-Poisson equations arising in plasma physics, SIAM J. Math. Anal., 44, 2012, 761-790, DOI:10.1137/110835657, (査読あり)

Shinya Nishibata, Masahiro Suzuki, Hierarchy of semiconductor equations: relaxation limits with initial layers for large initial data, MSJ Memoir, 26, 2011, 1-113, ISBN: 978-4-931469-66-2, (査読あり)

Tohru Nakamura, Shinya Nishibata, Stationary waves to viscous heat-conductive gas in half space with inflow boundary condition, Journal of Hyperbolic Differential Equations, 08, 2011, 651-670, DOI:10.1142/S0219891611002524, (査読あり)

[学会発表] (計 17 件)

Shinya Nishibata, Stability of stationary solutions to hyperbolic-parabolic systems in half space and the convergence rate, (スペクトル・散乱理論とその周辺, 数理解析研究所, 京都大学, October 15-17, 2014)

Shinya Nishibata, Asymptotic stability of stationary solutions to the

Euler-Poisson equation in plasma physics, (Wayamba International Conference 2014, Wayamba University of Sri Lanka, August 28-29, 2014)
Shinya Nishibata, Asymptotic stability of stationary solutions to hyperbolic-parabolic systems in half space and the convergence rate (the Summer Workshop on Kinetic Theory and Gas Dynamics, Stanford University, U.S., July 15-24, 2014)

Shinya Nishibata, Stationary Solutions to Symmetric Hyperbolic-parabolic Systems in Half Space (10th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Universidad Autonoma de Madrid, Madrid, Spain, July 7-11, 2014)

Shinya Nishibata, Asymptotic stability of stationary solutions to symmetric hyperbolic-parabolic systems in half space and the convergence rate (2014 International Conference on Nonlinear Evolutionary Partial Differential Equations, Shanghai Jiao Tong University, PRC, June 3-8, 2014)

Shinya Nishibata, Asymptotic stability of stationary solutions to the Euler-Poisson equation arising in plasma physics, (IMS Workshop on Nonlinear PDEs from Fluids and related Topics, The Chinese university of Hong Kong, Hong Kong, March 24-26, 2014)

Shinya Nishibata, Stationary waves to symmetric hyperbolic-parabolic

systems in half space (The 9th Japanese-German International Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, Waseda University, November 5-8, 2013)

Shinya Nishibata, Boundary layer to symmetric hyperbolic-parabolic systems (International Workshop on Nonlinear Analysis: Fluid Dynamics and Kinetic Theory, Academia Sinica, Taipei, Taiwan ROC, October 21-25, 2013)

Shinya Nishibata, Boundary layer solution to the hyperbolic-parabolic system (International Conference on the Mathematical Fluid Dynamics- on the occasion of Professor Yoshihiro Shibata's 60th birthday -, Hotel Nikko Nara, Nara, March 5-9, 2012)

Shinya Nishibata, Stationary solution to symmetric hyperbolic-parabolic system in half space (Evolutionary PDE and Kinetic Theory at, Academia Sinica, Tai-Pei, Taiwan, October 29-November 2, 2012)

Shinya Nishibata, Asymptotic stability of a stationary solution to the Euler-Poisson equation in plasma physics, (Kinetic Theory and Related Fields: Theoretical and Numerical Approaches, Kyoto Univ., September 24-28, 2012)

Shinya Nishibata, Asymptotic stability of a stationary solution to the Euler-Poisson equation arising in plasma physics (Kinetic Theory and Gas Dynamics Summer Workshop, Stanford Univ., U.S. July 8-28, 2012)

Shinya Nishibata, Asymptotic Stability of Stationary Solutions to the

Euler-Poisson Equations in Plasma Physics, (International conference on nonlinear evolutionary partial differential equations, Shanghai Jiao Tong University, P. R. China, June 12-17, 2012)

Shinya Nishibata, Asymptotic stability of boundary layers to the Euler-Poisson equation in plasma physics, (Mathematical approach to emerging topics in materials science 2012, Tohoku Univ., Feb.18-19, 2012)

Shinya Nishibata, Asymptotic stability of boundary layers to the Euler-Poisson equation arising in plasma physics, (8th East-Asia PDE conference, Pohang University of Science and Technology, Pohang, Korea, December 19-23, 2011)

Shinya Nishibata, Mathematical analysis on semiconductor equations: model hierarchy and asymptotic behavior, (Nonlinear dynamics in partial differential equations, Kyushu University, Fukuoka, Sept. 12-21, 2011)

Shinya Nishibata, Asymptotic stability of boundary layers to the Euler-Poisson equation in plasma physics, (Applied Mathematics Euskadi-Kyushu 2011, Basque Center for Applied Mathematics, Spain, March 10-11, 2011)

〔その他〕
ホームページ等
<http://www.is.titech.ac.jp/~shinya/lab/index-j.html>

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

西畑 伸也 (Nishibata, Shinya)
東京工業大学・大学院情報理工学研究科・教授
研究者番号 : 80279299