

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 26 日現在

機関番号：24403

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2011～2013

課題番号：23654136

研究課題名(和文) リウビル演算子の固有値スペクトルに基づいた古典的非可積分力学系の分析

研究課題名(英文) Analysis of non-integrable system by the eigenvalue problem of the Liouvillian in classical mechanics

研究代表者

野場 賢一 (Kenichi, Noba)

大阪府立大学・工学(系)研究科(研究院)・助教

研究者番号：30316012

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円、(間接経費) 660,000円

研究成果の概要(和文)：古典力学的状態の発展の演算子であるリウビル演算子の固有値問題に基づいて、古典的非可積分系の解析的な分析を行った。本研究では、非可積分系の典型的な例として小惑星・太陽・木星の制限三体問題に着目し、小惑星の分布において観測されている縞構造について、量子力学で発展してきた数学的手法を用いて定量的な解析を行った。小惑星と木星の公転周期が簡単な整数比になる共鳴点において摂動論を適用し、リウビル演算子の固有値問題の近似的解析解を求めた。またこの解を用いて小惑星分布の縞構造の時間発展を評価したところ、数千年という時間スケールで縞構造が現れることが判明した。

研究成果の概要(英文)：We have analyzed a non-integrable system in terms of the eigenvalue problem of the Liouville operator (the Liouvillian) that is the generator of motion in classical mechanics. We focus on the restricted three-body problem that consists of an asteroid, Sun, and Jupiter as one of the typical non-integrable systems. By using the degenerate perturbation theory which has been developed in quantum mechanics, we can analyze the resonance effect in the distribution of asteroids. We have obtained the approximate solutions of the eigenvalue problem of the perturbed Liouvillian at one of the resonance points where the ratios of the period of Jupiter to that of an asteroid are expressed by simple integers. These solutions indicate that the time scale of the formation of the striped pattern in the asteroid distribution is rather short in the order of thousand years.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：物理学、数理物理・物性基礎

キーワード：リウビル演算子の固有値問題 非可積分系 共鳴特異性 縮退がある場合の摂動論 小惑星の分布 制限三体問題

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 物理学の歴史上、非可積分系がはじめて認識されたのは、制限三体問題においてである。制限三体問題とは、互いに重力を及ぼしあって相互作用している3つの物体の運動（一般の三体問題）について、3体の運動を同一平面内に限るなどの制限を設けて単純化したものである。この問題は古い歴史をもち、オイラー、ラグランジュ、ヤコビなどの偉大な科学者達が挑戦したが、最終的にポアンカレがこの系は原理的に解くことができないこと、すなわち非可積分系であることを示した。この制限3体問題の具体的な例の一つが、太陽・小惑星・木星からなる系での小惑星の運動を求める問題である。

(2) 一方で、火星と木星の軌道の間数多く存在する小惑星の分布には縞構造が見られ、「カークウッドの隙間」と呼ばれる小惑星がほとんど存在しない領域があることが、100年以上前から知られている。この隙間は、木星の公転周期とその位置にある小惑星の公転周期の比が、 $2:1$ 、 $3:1$ 、 $5:2$ のような簡単な整数の比となるところにある。そのため、これらの隙間が木星との共鳴効果により生じているのは、定性的には明らかである。しかしながら共鳴点における木星の効果の定量的な解析は、その共鳴特異性のため困難であり、これまで小惑星の運動は、主に数値計算や半解析的な手法によって分析されてきた。

(3) 通常古典力学の解析では、ハミルトンの運動方程式を用いて、位相空間内の「軌跡」を分析することが多い。しかしこの他に、位相空間内の点の集合を考え、その分布関数という運動の「状態」に着目して解析を行う方法もある。この古典力学的状態の時間発展を記述する基本方程式はリウビル方程式と呼ばれる。リウビル方程式にはリウビル演算子という偏微分演算子が含まれ、リウビル方程式の解析はリウビル演算子の固有値問題の解析に帰着する。このリウビル演算子の固有値問題という新しい角度から、古典的非可積分系の解析を行うことにより、これまでになかった新しい知見が得られることが期待される。

## 2. 研究の目的

(1) 古典力学の少数自由度の非可積分系を、リウビル演算子の固有値問題に基づいて、量子力学で発展してきた固有値問題の数学的手法を使って、解析的に分析する。

(2) 非可積分系の具体的な例として太陽・小惑星・木星からなる制限三体問題を考え、小惑星の分布に現れる縞構造を、リウビル演算子の固有値スペクトルの観点から説明し、さらに固有値問題の解を用いて定量的な解析

を行う。

(3) 太陽・小惑星・木星の制限三体問題に限られることなく、もっと一般的な非可積分系の性質についても解析的・定量的に分析する。

## 3. 研究の方法

(1) リウビル演算子の固有値問題に基づいて、分布関数という古典力学的な状態に着目して解析を行う。

(2) 古典的リウビル演算子の固有値問題に対して、量子論的な解析手法を用いて、系統的な近似を行って定量的に解析する。リウビル演算子の固有値問題による古典系の解析は、ハミルトニアン固有値問題となる量子系の解析と、さまざまな点で数学的類似性を持っている。そこで、量子力学の解析で発展してきた数学的手法を、古典系の解析に適用する。

(3) 本研究において中心的な役割をはたす近似手法は、量子力学でよく知られている縮退がある場合の摂動論である。この手法を用いることにより、非摂動系で状態が縮退し共鳴特異性がある場合でも、定量的な解析を行うことが可能となる。

## 4. 研究成果

(1) 木星と小惑星の公転周期が簡単な整数比となる共鳴点において、非摂動リウビル演算子の固有関数が多重に縮退していることを見出した。

本研究の対象である太陽・小惑星・木星の制限三体問題では、以下のような条件を仮定している：3体は同一平面内を運動し、小惑星の重力が他の2体に及ぼす影響は無視でき、木星は太陽のまわりを円運動する。ここで太陽をまわる小惑星という2体問題が非摂動系で、木星の重力が摂動である。

ハミルトニアンを Delauney 変数と呼ばれる正準変数で表すと、非摂動ハミルトニアンは一般化運動量のみで表される。このとき、非摂動ハミルトニアンとポアソン括弧で定義される非摂動リウビル演算子の固有値問題は、簡単に解くことができる。その固有値は小惑星の軌道長半径の関数として得られ、固有関数は一般化座標である角変数に関するフーリエ基底となる。

木星と小惑星の公転周期の比が簡単な整数比となる各共鳴点において、非摂動リウビル演算子の固有値を調べると、固有関数が多重に縮退していることが判明した。すなわち固有値問題の観点からみると、共鳴点とは、無限個の固有関数が同じ固有値をもつ点である。

(2) 量子力学で用いられる縮退がある場合の

摂動論を適用し、共鳴点における木星の摂動の効果を議論した。

縮退がある場合の摂動論に従って、非摂動リウビル演算子の固有状態を基底にとって、摂動項の固有値問題を考える。通常量子力学の場合には、固有値問題に現れる行列の要素は数であり、固有値は代数方程式の解として求まる。しかしここで扱っている古典力学では、行列の要素に一般化運動量に関する微分演算子が含まれる。そのため解くべき固有値問題の方程式は、連立した偏微分方程式となる。

一般の場合にこの方程式の解を求めるのは困難であるため、小惑星が描く楕円軌道の離心率は小さいと仮定し、また共鳴点における縮退が3重であると仮定し、近似的微分方程式を導出してその解析を行った。

その結果、公転周期の比が2:1である共鳴点において、偏微分方程式の解析解の表式を得ることに成功した。一般に共鳴点における固有値方程式は2種類の運動量に関する偏微分方程式となるため、任意の共鳴点における解を求めるのは難しい。しかし2:1共鳴の場合には、変数分離が可能であり、2つの常微分方程式に帰着させることができるため、解析解を得ることができる。

ここで、共鳴点における多重縮退を3重縮退として扱うことは、小惑星の離心率が小さいという前提のもとで、小惑星の分布に主要な寄与をする成分に関して、妥当な近似となっていることを確認している。

(3) 木星と小惑星の公転周期の比が2:1である共鳴点において、木星の摂動に関する固有値問題の解を具体的に求め、それらを用いて分布関数の時間発展の評価を行った。

ここで扱っている固有値問題は、共鳴点において縮退がある場合の摂動論に基づいて導かれたものである。そのため、固有関数は共鳴点に局在したものでなければならない。またリウビル演算子のエルミート性からも、固有関数に関する境界条件が得られる。これらの条件から、ゼロ固有値以外の固有値の絶対値には下限があることを示した。すなわちリウビル演算子の固有値スペクトルにはバンド・ギャップが現れることがわかった。このバンド・ギャップの大きさは、小惑星分布の隙間の大きさに対応していると考えられる。

また2:1共鳴点において得られた固有値および固有関数の具体的な表式を用いて、適当な初期条件を与えた分布関数の時間発展の計算を行った。この計算により、はじめ共鳴点に存在していた小惑星の分布関数は、振動を伴って減衰し、数千年のオーダーで消滅することを示した。

(4) 木星の離心率は0.05程度であり、その楕円軌道の効果が小惑星の運動に影響を及ぼしている可能性がある。そのため制限三体問

題を拡張し、木星が楕円軌道を描くことを考慮して定式化を行った。

木星が円軌道を描く場合は回転座標系に変換することでハミルトニアンは時間依存性は除去できるが、楕円軌道の場合、摂動ハミルトニアンは不可避的に時間の関数となってしまう。そこでフロケの定理を共鳴点における木星の摂動に関する固有値問題に適用して、時間に依存しないフロケ・リウビル演算子の固有値問題の具体的な表式を導いた。

(5) 現在のところ得られている研究成果は、すべて太陽・小惑星・木星の三体問題に関するものであり、当初の目的の一部であった他の非可積分系の解析については具体的な結果は得られなかった。今後は本研究で得られた成果を生かして、他の非可積分系についても同様に解析を行いたい。例えば、今回の小惑星と類似した問題として、土星の輪に現れる多数の隙間の問題がある。この場合、土星の複数の衛星の存在がどのような影響をもたらすのか興味深い。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 0 件)

[学会発表](計 8 件)

野場賢一、小井関野海、Tomio Petrosky、小惑星分布の縞構造とリウビル演算子のバンド・スペクトル：共鳴点における多重縮退の評価、日本物理学会第69回年次大会、2014年3月28日、東海大学

Tomio Petrosky、小井関野海、野場賢一、小惑星分布の縞構造とリウビル演算子のバンド・スペクトル：制限三体問題における古典力学的状態関数の解析、日本物理学会第68回年次大会、2013年3月27日、広島大学

小井関野海、野場賢一、Tomio Petrosky、小惑星分布の縞構造とリウビル演算子のバンド・スペクトル：分布のギャップ生成のダイナミクス、日本物理学会第68回年次大会、2013年3月27日、広島大学

野場賢一、小惑星分布の縞構造とリウビル演算子のバンド・スペクトル、九州大学応用力学研究集会「地形のダイナミクスとパターン及び境界領域」、2012年10月31日、九州大学応用力学研究

Tomio Petrosky、野場賢一、小井関野海、

小惑星分布の縞構造とリウビル演算子のバンド・スペクトル：微細スペクトル構造に見る古典力学特有の効果、2012年日本物理学会秋季大会、2012年9月20日、横浜国立大学

Tomio Petrosky、野場賢一、リウビル演算子のバンド・スペクトルとレベル反発から見た小惑星系の縞構造 II：フロケの定理と擬振動数、2011年日本物理学会秋季大会、2011年9月22日、富山大学

野場賢一、岸田一希、Tomio Petrosky、リウビル演算子のバンド・スペクトルとレベル反発から見た小惑星系の縞構造 III：木星の離心率効果、2011年日本物理学会秋季大会、2011年9月22日、富山大学

Tomio Petrosky、リウビル演算子のバンド・スペクトルから見た小惑星系の縞構造とトランジスタ内の電子の量子論的ハミルトニアンバンド・スペクトル、天体力学 N 天体力学研究会 2011、2011年9月1日、大阪大学基礎工学部

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年月日：  
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年月日：  
国内外の別：

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

野場 賢一 (NOBA, Kenichi)  
大阪府立大学・大学院工学研究科・助教  
研究者番号：30316012

### (2) 研究協力者

トミオ ペトロスキー (PETROSKY, Tomio)  
テキサス大学 (アメリカ合衆国)・複雑量子系研究所・上級研究員