

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 14 日現在

機関番号：13601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2015

課題番号：23700014

研究課題名(和文)木生成問題の一般化とそのアルゴリズムに関する研究

研究課題名(英文)Studies on Algorithms for Generalized Tree Construction Problems

## 研究代表者

藤原 洋志 (FUJIWARA, Hiroshi)

信州大学・学術研究院工学系・准教授

研究者番号：80434893

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：我々は、有名なハフマン木問題に対して、各葉に任意の関数を関連付けることで一般化した問題を考察する。関数がすべて線形であれば、この問題はハフマンの多項式時間アルゴリズムで解ける。他方、一般にはNP困難であることがすでに分かっている。我々は、関数がすべて非減少2値関数である場合を解く多項式時間アルゴリズムを設計する。さらに我々は、関連するいくつかの最適化問題に対するアルゴリズムの改良限界を明らかにする。

研究成果の概要(英文)：We consider a problem that generalizes the famous Huffman Tree Problem by associating each leaf with an arbitrary function. If the functions are all linear, then the problem can be solved in polynomial time by Huffman's algorithm. On the other hand, it is known that the problem is NP-hard for general functions. We design a polynomial-time algorithm for the case of unit step functions. Moreover, we show limitations in improvement of algorithms for several related optimization problems.

研究分野：オンライン最適化

キーワード：アルゴリズム 組合せ最適化 数理工学 情報基礎 モデル化 オンライン最適化

1. 研究開始当初の背景

(1) 木は基本的な離散構造であり、目的に応じた木の生成は実用面においても重要性が増している。古典的な研究対象は、各葉についての(重み)×(深さ)の総和を最小化する2分木であった。これは平均符号語長を最小とするハフマン符号を表現することで有名である。派生問題として、例えば(重み)×(定数の深さ乗)の総和を最小化する問題などが研究されてきたが、しかし統一的な枠組みはなかった。研究代表者は、こうした派生問題をすべて包括する一般化を行った。具体的には、各葉の、目的関数への貢献度をそれぞれ、深さの関数とみなすことで一般化した。この一般化された問題を解くための高速アルゴリズムの開発と同時に、アルゴリズムの性能改良限界の解明の両面から研究を行う。

(2) 古典的スキーレンタル問題は、オンライン最適化問題を紹介する際の格好のトイプロblemである。将来の使用期間が不明な耐久財を求める際に、賃貸が得か、あるいはどのタイミングでの購入が得か、という選択を定式化した問題である。多状態スキーレンタル問題はこれを拡張した問題であり、可能な選択肢が賃貸か購入かのみでなく、加えて、耐久財の一部を購入し残りは賃貸する選択肢が複数用意されている。多状態スキーレンタル問題を別の角度から解釈すると、モバイル機器の多段階低電力モード推移戦略(例えば、30分操作がなければスリープ、さらに60分たてばシャットダウン、など)の最適化(つまり省電力化)を表現していることから、とりわけ家電メーカーの開発部門からの関心が高い。本問題において、プレイヤーの戦略はオプション間の遷移を表す決定木とみなすことができる。

2. 研究の目的

(1) 一般化ハフマン木問題は、各葉に結び付けられた関数がすべて線形関数である場合、古典的ハフマン木問題と一致する。したがって、有名なハフマンのアルゴリズムで解くことができる。また、(重み)+(深さ)の最大値や、(重み)×(定数の深さ乗)の総和を目的関数とする問題も、ハフマンのアルゴリズムの変種を用い最適に解けることが分かっている。他方、研究代表者のこれまでの研究により、一般の関数を許すとNP困難であることが明らかになった(表1参照)。そこで、本課題ではどのような関数のクラスに対して多項式時間アルゴリズムで解けるかを明らかにすることにより、一般化ハフマン木問題の持つ本質を解明する。

表1. 一般化ハフマン木問題の計算複雑性 (nは葉の数を表す)

| 関数のクラス | 時間計算量                                |
|--------|--------------------------------------|
| 線形     | $O(n \log n)$<br>[Huffman 1952]      |
| 非減少2値  | $O(n \log n)$<br>[藤原, 中村, 藤戸 2015]   |
| 非減少凸   | $O(n^2 \log n)$<br>[藤原, Jacobs 2014] |
| 一般     | NP 困難<br>[藤原, Jacobs 2014]           |

ハフマン木問題の計算複雑性は、探索木問題のそれとは対照的であることに注意を払いたい。ハフマン木問題と同じく、各葉に結び付けられた関数を持つものの、入力に葉順指定があるものは探索木問題と呼ばれる。すなわち探索木問題では、出力された木の葉を左から右へとたどるとき、入力で指定された順に並んでいることが要求される。この問題に対しては、 $O(n \log n)$ 時間で最適木を計算するHu-Tuckerアルゴリズムが知られている。さらに派生問題として、(重み)×(定数の深さ乗)の総和を目的関数とする問題も、Hu-Tuckerアルゴリズムの変種で最適に解けることが分かっている。しかしながら、ハフマン木問題とは異なり、一般の関数についても多項式時間アルゴリズムが存在する。

(2) 多状態スキーレンタル問題はオンライン最適化問題の一種であり、他のオンライン最適化問題と同様、アルゴリズムの性能を競合比という尺度で計るのが標準的である。常に研究者の注目を集めるのが、競合比の上界および下界である。競合比の上界とは、簡単に言えば、現在までに知られている最良アルゴリズムの性能である。競合比の上界の改良とは、すなわち、アルゴリズムの改良を意味する。

他方、競合比の下界は、研究の動機が直感的でなく、若干の説明が必要だろう。競合比の下界とは、アルゴリズム改良限界のことである。アルゴリズム改良限界は、研究者にとっては理論上の考察対象であるが、実は現実世界の事例を入力とするアルゴリズムにもそのままあてはまる。より良い下界が得られれば、それはアルゴリズム改良限界がより明瞭になることを意味し、これはアルゴリズム開発のための資源浪費の回避につながる。

3. 研究の方法

(1) 一般化されたハフマン木問題は、たとえ各葉の持つ関数の値域がすべて、0または1の2値に限定された場合においても、NP困難であることがすでに知られている。他方、各葉の持つ関数が線形関数である場合には、有名なハフマンのアルゴリズムを用いることにより、 $O(n \log n)$ 時間で解くことができる

(ここで  $n$  は葉の数)この2つの事実から、どのような関数のクラスであれば  $n$  の多項式時間で計算可能であるかに注目が集まっている。

研究代表者は、非減少2値関数に着目する。非減少2値関数とは、引数の値がある閾値までであるなら低い定数値をとり、それ以外は高い定数値をとるという1変数関数である。つまり値は0または1であるが、その値は非減少である関数である。非減少2値関数に対するハフマン木問題を考察するにあたり、一からアルゴリズムを設計するのではなく、問題例の構造を十分に精査することにより、既に多項式時間アルゴリズムが得られている最適化問題への帰着を行う。

(2) 多状態スキーレンタル問題について Augustine らは、与えられたインスタンスに対して最適な戦略を計算するアルゴリズムを設計した。このアルゴリズムはオプション数の多項式時間で動作するため、容易に最適戦略を得ることができる。しかしながら、インスタンスと、それに対する最適戦略との理論的相関についてはほとんど知られていなかった。研究代表者は、数理計画法の手法を応用し、戦略とインスタンスの両方を変数と見なす最適化問題を定式化することにより、この点を明らかにする。

状態数が任意の場合の多状態スキーレンタル問題については、既存結果として、Damaschke により、競合比の下界 3.61 が与えられていた。また、Bejerano らによって競合比の上界 4 が明らかにされていた。しかしながら、真の上下界は永く未解決である。これについて、Damaschke は真の値は 4 である、と予想している。研究代表者は Damaschke が競合比の下界の証明に用いた手法に着目し、これを拡張する。実際に、状態数を固定した場合に対する競合比の下界を得ることにより、Damaschke の予想の反証の有力な証拠を与える。そのことから研究代表者は、真の上下界が 3.61 であることと予想する。

さらに、関数最適化を応用した、アルゴリズム性能評価手法の、一層の普及を図る。後述の SRPT スケジューリングアルゴリズムの解析の基となった Chung らの 2010 年の論文は、トップカンファレンスの一つである国際会議 SODA で発表されたものであった。つまり、トップカンファレンスの論文にも関数最適化の議論を詰め切れていないものがあるということである。これはとりもなおさず、アルゴリズムの性能解析全般において関数最適化の活躍の場が大いに残されていることを示唆している。研究代表者の研究により、関数最適化がアルゴリズムの性能解析において如何に有用であるかを知らしめる。

#### 4. 研究成果

(1) 非減少2値関数を入力とするハフマン木問題に対するアルゴリズム開発を行った。設計したアルゴリズムの流れは次のとおりである。まず、与えられたハフマン木問題の問題例の閾値の列がクラフトの不等式を満たすか確認する。次に問題例をコインコレクター問題の問題例へと変換する。最後にコインコレクター問題についての Package-Merge アルゴリズムを用いて、効率的に最適解を得る。本研究について、国際会議 AAAC2015 にて発表を行った。さらに、電子情報通信学会英文論文誌 A での論文発表を行った。

(2) 研究代表者は、多状態スキーレンタル問題に関し、オプション数が固定された場合について、プレイヤーにとって最も易しいインスタンスとそれに対する最適戦略の理論的導出、及びその理論的性能評価を行った。さらに、オプション数が3の場合と4の場合それぞれについて、プレイヤーにとって最も難しいインスタンスとそれに対する最適戦略の理論的導出、及びその理論的性能評価を与えた。前者の結果からの自然な帰結として、オプションの数を任意とした場合についての最適戦略の理論的性能限界が明らかとなっている。また後者の結果はとりもなおさず、多くの研究者が注目するところの「競合比の一致する上下界」を、この問題に関して初めて証明している。研究代表者はこれらの結果をまとめて、評価の高い国際会議 ISAAC2011 で発表した。

(3) 研究代表者は多状態スキーレンタル問題に対し、非加算無限個の中間オプションを持つ問題の定式化の一つを与えた上で、最適戦略の導出を行った。多状態スキーレンタル問題は、従来はもっぱら、中間オプションの数を任意の有限個と仮定する研究であった。研究代表者は、非加算無限個の中間オプションを持つ問題の定式化を初めて与え、最適戦略の導出を行った。この結果について、国際会議 AAAC2012 で発表した。またこの結果と、有限個の中間オプションを持つ問題に関する最新結果とを交えた講演を2件(2件とも招待講演)を行った。

(4) 研究代表者は多状態スキーレンタル問題の競合比の下界に着目した。既存結果として、Damaschke により、任意の状態数を許す場合について競合比の下界 3.61 が与えられていた。研究代表者はその導出手法に着目した。そして状態数をパラメータで指定する場合に対して、プレイヤーにとり都合の悪いインスタンスの構成法を示唆していることを見抜いた。そして Damaschke の手法を拡張し、状態数を入力とするスキームを設計した。これにより、状態数が5以上の場合についての競合比の下界を初めて証明した。この

結果を国際会議 ISORA2013 にて発表した。またこの研究成果を煮詰め、証明手法を見直した上で、電子情報通信学会英文論文誌 A への論文掲載を行った。

(5) スケジューリング問題は、実用と理論の両面において極めて重要な問題である。研究代表者は複数の均一な機械上において、ジョブ完了時刻の和の最小化を目的とするモデルを取り上げる。ここで各ジョブは前触れなく到着し、それぞれ到着時にはじめてその処理時間が明らかになるものとする。本モデルに対する単純かつ実用的なアルゴリズムとして、それぞれの機械につき、未完了のジョブのうち残りの処理時間が短いものから実行する SRPT アルゴリズムがよく用いられる。しかしながらその理論的性能については長い間知られていなかった。Chungらは2010年に、この SRPT アルゴリズムの競合比が 1.857 以下であることを示した。研究代表者はこれを改良し、競合比が 1.792 以下であることを証明した。研究代表者の解析は関数解析に基づいた手法であり、アルゴリズム理論における発展性に富んでいる。結果をまとめ、学術雑誌 Information Processing Letters に論文を掲載した。

(6) ビンパッキング問題は、均一の容量のなるべく少ない数のビンを用い、与えられるアイテム全てを詰める問題である。永く理論計算機科学における重要な話題であるだけでなく幅広い応用がある。とりわけ、各ビンに詰められるアイテム数上限があらかじめ制限されている問題は、多くの関心を集めている。研究代表者は、各ビンのアイテム数上限を 2 とする問題について、既存の競合比下界を改良した。具体的には、いかなる戦略を用いても、競合比が 1.42764 以上となるアイテムの例を構成できることを証明した。またアイテム数上限を入力としたスキームを設計し、アイテム数上限が 4, 5 および 10 から 41 までの場合について既存の競合比下界を改良した。これらの結果を国際会議 COCOON2013 にて発表した。

(7) 通信会社が提供する従量制通信料契約と定額制通信料契約の選択をオンライン最適化問題として定式化し研究を行った。従量制通信料契約とは、文字通り、通信の量に比例した課金である。他方、定額制通信料契約とは、まず通信の量に関係なく最低料金が課せられ、そして通信の量が一定に達するまではそれに比例して課金が増え、その後はもはや追加課金がなくなるというものである。申請者は、この選択の問題を、有名なスケジューリング問題を含んだ定式化を行い、競合比を用いた解析を行った。具体的には、競合比を計算するための簡便法を構築し、それに基づき、典型的な問題例のクラスについて最適な契約切り替え戦略を導出した。本結果につい

て、電子情報通信学会英文論文誌 A での論文発表を行った。

## 5 . 主な発表論文等

(雑誌論文)(計 10 件)

Hiroshi Fujiwara, Atsushi Matsuda, Toshihiro Fujito, Competitive Analysis for the Flat-Rate Problem, IEICE Transactions on Information and Systems, Vol. E99-D, No. 3, 559-566, 2016, 査読有

DOI:10.1587/transinf.2015FCP0005

Hiroshi Fujiwara, Takahiro Seki, Toshihiro Fujito, Online Weight Balancing on the Unit Circle, IEICE Transactions on Information and Systems, Vol. E99-D, No. 3, 567-574, 2016, 査読有

DOI:10.1587/transinf.2015FCP0006

Hiroshi Fujiwara, Takuma Kitano, Toshihiro Fujito, On the Best Possible Competitive Ratio for the Multislope Ski-Rental Problem, Journal of Combinatorial Optimization (JOCO), Vol. 31, Issue 2, 463-490, 2016, 査読有

DOI:10.1007/s10878-014-9762-9

Hiroshi Fujiwara, Takuya Nakamura, Toshihiro Fujito, The Huffman Tree Problem with Unit Step Functions, IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, Vol. E98-A, No. 6, 1189-1196, 2015, 査読有

DOI:10.1587/transfun.E98.A.1189

Hiroshi Fujiwara, Koji Kobayashi, Improved Lower Bounds for the Online Bin Packing Problem with Cardinality Constraints, Journal of Combinatorial Optimization (JOCO), Vol. 29, Issue 1, 67-87, 2015, 査読有

DOI:10.1007/s10878-013-9679-8

Hiroshi Fujiwara, Tobias Jacobs, On the Huffman and Alphabetic Tree Problem with General Cost Functions, Algorithmica, Vol. 69, Issue 3, 582-604, 2014, 査読有

DOI:10.1007/s00453-013-9755-6

Hiroshi Fujiwara, Yasuhiro Konno, Toshihiro Fujito, Analysis of Lower Bounds for the Multislope Ski-Rental Problem, IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, Vol. E97-A, No. 6, 1200-1205, 2014, 査読有

DOI:10.1587/transfun.E97.A.1200

Eishi Chiba, Hiroshi Fujiwara, Yoshiyuki Sekiguchi, Toshihide

Ibaraki, Collision Probability in an In-Line Equipment Model under Erlang Distribution, IEICE Transactions on Information and Systems, Vol. E96-D, No. 3, 400-407, 2013, 査読有

DOI:10.1587/transinf.E96.D.400

Hiroshi Fujiwara, Yoshiyuki Sekiguchi, An Improved Analysis of SRPT Scheduling Algorithm on the Basis of Functional Optimization, Information Processing Letters (IPL), Vol. 112, Issue 23, 911-915, 2012, 査読有

DOI:10.1587/transinf.E96.D.400

Hiroshi Fujiwara, Kazuo Iwama, Yoshiyuki Sekiguchi, Average-Case Competitive Analyses for One-Way Trading, Journal of Combinatorial Optimization (JOCO), Vol. 21, Issue 1, 83-107, 2011, 査読有

DOI:10.1016/j.ipl.2012.08.009

〔学会発表〕(計 17 件)

藤原 洋志, ピンパッキング問題, 日本オペレーションズ・リサーチ学会中部支部講演会, 2015.12.9, 愛知県立大学サテライトキャンパス(愛知県名古屋市)(招待講演)

Hiroshi Fujiwara, Takuya Nakamura, Toshihiro Fujito, An Algorithm for the Huffman Tree Problem with Unit Step Functions, The 8th Annual Meeting of Asian Association for Algorithms and Computation (AAAC2015), 2015.5.10, 安芸グランドホテル(広島県安芸市)

藤原 洋志, 円周  $n$  等分点への質点配置問題, 列挙アルゴリズムセミナー, 2015.3.6, 群馬大学伊香保研修所(群馬県渋川市)

藤原 洋志, 円周  $n$  等分点への質点配置問題, グレブナー若手集会, 2015.2.1, 信州大学理学部(長野県松本市)

Hiroshi Fujiwara, Takahiro Seki, Toshihiro Fujito, Online Weight Balancing on the Unit Circle, The 16th Japan Conference on Discrete and Computational Geometry and Graphs (JCDCGG2013), 2013.9.17, 東京理科大(東京都新宿区)

Hiroshi Fujiwara, Yasuhiro Konno, Toshihiro Fujito, Lower Bounds for the Multislope Ski-Rental Problem. The 11th International Symposium on Operations Research and its Applications (ISORA2013), 23-28, 2013.8.24, 黄山(中国)

Hiroshi Fujiwara, Koji Kobayashi, Improved Lower Bounds for the Bin Packing Problem with Cardinality

Constraints, 夏の LA シンポジウム, 2013.7.16, 休暇村志賀島(福岡県福岡市)

Hiroshi Fujiwara, Koji Kobayashi, Improved Lower Bounds for the Online Bin Packing Problem with Cardinality Constraints, The 19th Annual International Computing and Combinatorics Conference

(COCOON2013), 2013.6.22, 杭州(中国)

藤原 洋志, スキーレンタル問題とオンライン最適化, 「文部科学省委託事業数学協働プログラム」最適化ワークショップ: 広がっていく最適化, 2013.2.18, 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所(福岡県福岡市)(招待講演)

松田 淳志, 藤原 洋志, 藤戸 敏弘, 携帯パケット通信料問題に対するオンラインアルゴリズム, 電気関係学会東海支部連合大会, 2012.9.25, 豊橋技術科学大学(愛知県豊橋市)

Hiroshi Fujiwara, On the Best Possible Competitive Ratio for Multislope Ski Rental, 電子科技大学計算機学院学者論壇, 2012.6.9, 成都(中国)(招待講演)

Hiroshi Fujiwara, Solving the Infinite-Slope Ski Rental via Functional Analysis, The 5th Annual Meeting of the Asian Association for Algorithms and Computation (AAAC2012), 2012.4.22, 上海(中国)

藤原 洋志, 円周上へのアイテム配置問題, 列挙アルゴリズムセミナー, 2012.3.1, 群馬大学伊香保研修所(群馬県渋川市)

Hiroshi Fujiwara, Takuma Kitano, Toshihiro Fujito, On the Best Possible Competitive Ratio for Multislope Ski Rental, The 22nd Annual International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC2011), 2011.12.8, ワークピア横浜(神奈川県横浜市)

関 孝洋, 藤原 洋志, 藤戸 敏弘, 単位円周上におけるアイテム配置問題, 夏の LA シンポジウム, 2011.7.19, ザヴィラ浜名湖(静岡県湖西市)

松田 淳志, 藤原 洋志, 藤戸 敏弘, 携帯パケット通信料問題に対するオンラインアルゴリズム, 夏の LA シンポジウム, 2011.7.19, ザヴィラ浜名湖(静岡県湖西市)

藤原 洋志, 関口 良行, 関数最適化に基づくアルゴリズムの性能解析, 夏の LA シンポジウム, 2011.7.19, ザヴィラ浜名湖(静岡県湖西市)

〔図書〕(計 2件)

Hiroshi Fujiwara, Koji M. Kobayashi, Ming-Yang Kao (editor), Springer, Encyclopedia of Algorithms, 2016, 2389(pp211-214)

John V. Guttag (原著), 久保 幹雄 (監修, 翻訳), 麻生 敏正 (翻訳), 木村 泰紀 (翻訳), 小林 和博 (翻訳), 関口 良行 (翻訳), 並木 誠 (翻訳), 藤原 洋志 (翻訳), 近代科学社, Python 言語によるプログラミングイントロダクション: 世界標準 MIT 教科書, 2014, 323(pp101-157)

〔その他〕

解説記事

藤原 洋志, 省電力とオンライン最適化, 電子情報通信学会誌, Vol. 97, No. 6, 502-506, 2014.6.1

ラジオ研究解説

藤原 洋志, 『一寸先は闇』の攻略法, 天伯之城 ギカダイ, エフエム豊橋, 2014.4.5

ホームページ

<http://hfujiwara.wikispaces.com/j>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤原 洋志 (FUJIWARA, Hiroshi)

信州大学・学術研究院工学系・准教授

研究者番号: 8 0 4 3 4 8 9 3