

平成 27 年 6 月 8 日現在

機関番号：14301

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23700016

研究課題名(和文) 離散凸性を持つ組合せ最適化問題に対する高速なアルゴリズムの設計

研究課題名(英文) Designing Efficient Algorithms for Combinatorial Optimization Problems with Discrete Convexity

研究代表者

高澤 兼二郎 (TAKAZAWA, Kenjiro)

京都大学・数理解析研究所・助教

研究者番号：10583859

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、離散凸性をもつ様々な組合せ最適化問題に対し、その離散凸性を活かしたアルゴリズムを設計した。

(1) マッチング森問題、および、最短双有向森問題に対し、その離散凸性を証明した。この離散凸性に注目した既存のアルゴリズムの単純化や高速化、あるいは新たな組合せ的アルゴリズム設計を行った。

(2) 各頂点に接続する辺数が3のグラフにおいて、数種のハミルトン閉路に近い辺集合を求めるアルゴリズムを設計した。離散凸性の一つであるカット関数の劣モジュラ性などに注目することにより、NP 困難であるハミルトン閉路問題の緩和問題に対して高速なアルゴリズムを設計したものである。

研究成果の概要(英文)：In this research, we have revealed discrete convex structures in several combinatorial optimization problems and have designed efficient algorithms utilizing the discrete convexity.

(1) We have revealed discrete convex structures in the optimal matching forest and shortest bibranching problems. We have designed simpler and faster algorithms by utilizing the discrete convex structure.

(2) We have designed algorithms for finding several kinds of restricted 2-factors, which are close to Hamilton cycles. By making use of submodularity of cut functions, we obtained efficient algorithms for relaxation problems to the Hamilton cycle problem.

研究分野：組合せ最適化

キーワード：アルゴリズム 離散凸解析 マッチング理論

1. 研究開始当初の背景

室田らによって 2000 年前後に提唱された「離散凸解析」の理論において、離散構造の凸性に注目することにより、取り扱いやすい離散最適化問題の共通の性質が明らかにされてきた。マトロイドや劣モジユラ関数などに対する従来の理論を包括する広い枠組が構築されていた。

一方で、離散凸解析の一般の理論から直接アルゴリズムが設計できる場合は限られており、問題特有の性質に注目することによってアルゴリズムが設計されることが多かった。

2. 研究の目的

本研究の主目的は、問題特有の性質と離散凸性の双方に注目することにより、高速かつ性質の良いアルゴリズムを設計することである。すなわち、最近 10 年間に於いて目覚ましい深化を遂げた離散凸解析の理論をアルゴリズム設計に応用することが本研究の目的である。

3. 研究の方法

離散凸解析のアルゴリズム設計への応用にあたり、以下の二種類の方法を採った。

- (1) 多項式時間可解性が知られているものの、複雑なアルゴリズムしか知られていない問題に対し、離散凸解析の理論を適用した。これらの問題が離散凸性をもつことを証明し、多項式時間可解であることの新たな理由付けを与えた。さらに、明らかにした離散凸性に注目することによるアルゴリズムの単純化や高速化など、性質の良いアルゴリズムを設計した。
- (2) 計算複雑度が明らかにされていない問題に対し、問題のもつ離散凸性を明らかにした。問題が離散凸構造をもつことを証明することによって、その問題の多項式時間可解性が示唆される。

4. 研究成果

具体的な成果は以下の通りである。

- (1) 重み付き独立偶因子問題に対する組合せ的アルゴリズムを発表した。重み付き偶因子問題に対しては、筆者らのこれまでの研究によってジャンプシステム上の M 凸関数という離散凸構造が証明されていた。本研究では、独立偶因子というマトロイド制約を加えた問題に対し、既存のマトロイドの交わり問題に対するアルゴリズムとマッチングアルゴリズムの共通の拡張を与え、性質の良い重み付き独立

偶因子アルゴリズムを設計した。本アルゴリズムにより、マトロイドの交わり問題とマッチング問題に対する線形計画表現の整数性について、共通の拡張を得た。

- (2) 2-マッチングとは、すべての頂点に高々 2 本が接続する辺部分集合と定義される。与えられたグラフにおいて長さが 4 以下の閉路をもたない 2-マッチングの中で変数が最大のを求める計算複雑度は未解決である。本研究では、長さが 4 以下の閉路をもたない 2-マッチング全体がジャンプシステムという離散凸構造をもつという Cunningham (2002) の予想を証明した。この結果により、本問題は多項式時間可解であることが強く示唆される。
- (3) マッチング森問題に対して、その離散凸性を証明した。マッチング森問題とは、マッチングと根付き有向木の共通の一般化であり、多項式時間可解性は知られていたが、そのアルゴリズムは複雑なものであった。また、その多項式時間可解性は線形計画表現の整数性に起因するとこれまでは理解されてきた。本研究で離散凸性が証明されたことにより、多項式時間可解性に対する新たな理由付けが与えられた。さらに、この離散凸性に注目した既存のアルゴリズムの単純化や、高速化を行った。
- (4) 最短双有向森問題の離散凸解析との関連を明らかにした。最短双有向森問題についてもやはり多項式時間アルゴリズムと整数性をもつ線形計画表現が知られていた。本研究では、有向森の離散凸構造に注目することにより、最短双有向森問題が付値マトロイドの交わり問題の枠組に入ることを明らかにした。さらに、これによって最短双有向森問題に対する新たな組合せ的アルゴリズムを得た。
- (5) 各頂点に接続する辺数が 3 のグラフ (3 正則グラフ) において、数種のハミルトン閉路に近い辺集合を求めるアルゴリズムを設計した。具体的には、以下のアルゴリズムを設計した。ここで、2-因子とは、各頂点に丁度 2 本が接続する辺部分集合である。
 - 1 辺を削除しても連結である 3 正則グラフ (2 辺連結 3 正則グラフ) において、辺数が 3 の辺カットすべてと交わる 2-因子の中で、重み和が最小のものを求めるアルゴリズム。
 - 2 辺連結 3 正則グラフにおいて、辺

数が3および4の辺カットすべてと交わる2-因子を求めるアルゴリズム.

2辺を削除しても連結である3正則グラフ(3辺連結3正則グラフ)において, 辺数が3のすべての辺カットと交わり, 長さが5以上の閉路から成る2-因子を求めるアルゴリズム.

3辺連結3正則グラフにおける最小2辺連結部分グラフ問題に対する6/5近似アルゴリズム.

以上の ~ に対しては, 本研究が初の多項式時間アルゴリズムとなる. 特に, の2-因子についてはその存在性は既存研究の中で証明されていたが, 本研究において初めて多項式時間アルゴリズムが与えられた. また, のアルゴリズムは, あるいは で求めた2-因子を初期解とするものであり, 既存の最良の近似率5/4 (Huh 2004)を改善している. 本研究は, 離散凸性の一つであるカット関数の劣モジュラ性などに注目することにより, NP 困難であるハミルトン閉路問題の緩和問題に対して高速なアルゴリズムを設計したものである.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

K. Takazawa: Optimal matching forests and valuated delta-matroids, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 28 (2014), pp. 445-467. 【査読有】

DOI: 10.1137/110827661

S. Boyd, S. Iwata and K. Takazawa: Finding 2-factors closer to TSP tours in cubic graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 27 (2013), pp. 918-939. 【査読有】

DOI: 10.1137/110843514

K. Takazawa: Shortest bibranchings and valuated matroid intersection, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 29 (2012), pp. 561-573. 【査読有】

DOI: 10.1007/s13160-012-0072-2

Y. Kobayashi, J. Szabó and K. Takazawa:

A proof of Cunningham's conjecture on restricted subgraphs and jump systems, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 102 (2012), pp. 948-966. 【査読有】
DOI: 10.1016/j.jctb.2012.03.003

K. Takazawa: A weighted independent even factor algorithm, *Mathematical Programming, Series A*, 132 (2012), pp. 261-276. 【査読有】

DOI: 10.1007/s10107-010-0397-z

[学会発表](計12件)

高澤兼二郎: 2部グラフにおける制約付き2-マッチングの分解定理, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2015年春季研究発表会, 東京理科大学, 2015年3月26日.

高澤兼二郎: 2部グラフにおける制約付き2-マッチングの分解定理, 研究集会「最適化: モデリングとアルゴリズム」, 統計数理研究所, 2015年3月19日.

高澤兼二郎: 制約付き2-因子の構造とアルゴリズム: 2-因子からハミルトン閉路へ, 2014年度 RIMS 共同研究「禁止マイナー・因子理論に関する諸問題の研究」, 京都大学, 2014年9月2日.

S. Boyd, S. Iwata and K. Takazawa: Finding 2-factors closer to TSP tours in cubic graphs, *The 18th Aussois Combinatorial Optimization Workshop, Aussois (France)*, 2014年1月7日.

K. Takazawa: Shortest bibranchings and valuated matroid intersection, *Combinatorial Geometries: Matroids, Oriented Matroids and Applications, Marseille (France)*, 2013年4月6日.

K. Takazawa: Discrete convexity in network optimization: Matching forests and bibranchings, *Kyoto RIMS Workshop "Discrete Convexity and Optimization"*, 京都大学, 2012年10月16日.

高澤兼二郎: 離散凸構造を持つ組合せ最適化問題, 日本オペレーションズ・リサーチ学会「最適化の理論と応用」研究部会 (SOTA), 東京大学, 2012年10月13日.

S. Boyd, S. Iwata and K. Takazawa: Finding 2-factors closer to TSP tours in cubic graphs, *The 3rd Cargèse Workshop on Combinatorial Optimization, Corsica (France)*, 2012年9月17日.

S. Boyd, S. Iwata and K. Takazawa: Covering cuts in bridgeless cubic graphs,

The 21st International Symposium on Mathematical Programming (ISMP 2012), Berlin (Germany), 2012年8月21日.

K. Takazawa: Shortest bibbranchings and valuated matroid intersection, The First ETH-Japan Workshop on Science and Computing, Engelberg (Switzerland), 2012年3月11日.

K. Takazawa: Optimal matching forests and valuated delta-matroids, The 15th Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO 2011), New York (USA), 2011年6月15日.

高澤兼二郎: マッチング森とデルタマトロイド, 離散幾何解析セミナー, 京都大学, 2011年5月27日.

〔図書〕(計1件)

高澤兼二郎: マッチング, 薩摩順吉, 大石進一, 杉原正顕 (編), 応用数理解析ハンドブック, 朝倉書店, 2013年, pp. 288-289.

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

高澤 兼二郎 (TAKAZAWA, Kenjiro)
京都大学・数理解析研究所・助教
研究者番号: 10583859

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

()

研究者番号: