

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 27 年 6 月 24 日現在

機関番号：15201

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23700020

研究課題名(和文)幅が制限された論理回路の計算量に関する研究

研究課題名(英文)A Study on the Complexity of Bounded Width Boolean Circuits

## 研究代表者

森住 大樹 (MORIZUMI, Hiroki)

島根大学・総合理工学研究科(研究院)・助教

研究者番号：50463782

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：幅が制限された論理回路に着目し、その回路計算量の解明を進めることを目的として研究を実施した。本研究は、計算機が行う計算の数学的モデルとして論理回路をとらえ計算量理論の立場から研究を行ったものであり、背景にはP対NP問題に代表される問題の本質的な難しさに関する多くの未解決問題がある。結果として、論理回路と論理関数に関する複数の成果を得た。

研究成果の概要(英文)：We studied bounded width Boolean circuits to explore the circuit complexity. In this study, Boolean circuits are considered as a mathematical model of computation, and studied from the viewpoint of computational complexity theory, on the background that there are many open problems of computational complexity such as the P vs. NP problem. As the conclusion, we obtained several results for Boolean circuits and Boolean functions.

研究分野：理論計算機科学

キーワード：計算量理論 回路計算量 論理回路 論理関数 幅限定回路

## 1. 研究開始当初の背景

計算機の進歩とともに計算機を活用して問題を解くことが広く行われるようになり多くのアルゴリズムが開発されているが、その一方、問題の本質的な難しさについては、P対NP問題をはじめとして解明されていない事が多く残されている。回路計算量の研究では、論理回路をチューリング機械と同様に計算機が行う計算の数学的モデルとしてとらえ、その素子数や段数などを基準として問題の難しさを議論する。素子数や段数の下限を得ることは、問題の難しさを数学的に証明したことを意味する。

回路計算量は1980年代ごろ、P対NP問題を解決するための有力な手段として盛んに研究されるようになった。P対NP問題は理論計算機科学における最大の未解決問題の一つであり、2000年にクレイ数学研究所により、リーマン予想などとともに7つの数学の未解決問題の一つとして解決に対して多額の懸賞金が懸けられたことで、より広くその重要性が知られるようになった。NPに属する一つの問題を計算する論理回路を構成するために入力サイズに対して多項式個を越える素子が必要であることが証明されれば、P = NPを示したことになる。P対NP問題は解決される。よって、素子数の下限を示すことが回路計算量における最大の目標であり、同時に最も困難な目標でもある。P対NP問題に限らず問題の難しさを議論する手段として回路計算量はしばしば有効に活用されている。

## 2. 研究の目的

本研究では、幅が制限された論理回路に着目し、その回路計算量の解明を進め、難問とされている問題の難しさに関する未解決問題の将来の解決へとつながる成果を得ることを目的とした。幅が制限された論理回路に対しては、並列計算の計算量クラスとの関係を示した Barrington の定理のように広く知られた成果もあるものの、段数が制限された回路などに比べるとこれまで研究がそれほど行われておらず、回路計算量の新たな進展の可能性があると考えた。

## 3. 研究の方法

本研究は理論的な研究であり、実験やシミュレーション等は行っていない。共同研究者との議論または研究代表者のみにより研究を進めた。6の研究組織にも記載の通り、研究分担者や連携研究者は定めておらず研究代表者のみによる研究実施が中心であった

が、2つの研究成果において異なる共同研究者との共同研究を行った。そのうちの1つはロシアの研究者との共同研究である。国際会議または国内研究会において発表を積極的に行った。

## 4. 研究成果

論理回路の幅の観点から研究を進め、その過程において、論理回路と論理関数に関する複数の成果を得た。そのうちの代表的なものについて以下に順に述べる。(順序は発表年次の順)

(1)  $n$ 個のMOD関数を同時に計算する論理回路の素子数に関する研究を行い、成果を得た。ある出力1つを計算する論理回路が線形サイズの素子数では構成不可能であることを証明することは回路計算量理論の大きな課題となっているが、同様のことは出力が  $n$ 個の場合も示されていない。線形サイズの素子数で構成可能であるか不可能であるかの境界近辺のものとしてMOD関数を研究対象とした。同じく対称関数の一種である  $n$ 個の閾値関数は線形サイズの素子数で構成可能であることが知られている。研究成果として、 $n$ 個のMOD関数が、剰余を固定した場合には線形サイズの素子数で構成可能であり、剰余を固定しない場合には  $O(n \log \log n)$ の素子数で構成可能であることを証明した。以上の成果は査読付き国際会議 CSR'12にて発表を行った。

(2) 論理回路の出力パターンを数え上げる問題について研究を行い、以下の成果を得た。ここでの出力パターンとは、回路としての出力のみではなく回路に含まれる全ての素子それぞれがとる出力の状態を意味し、その起こり得るパターンの総数を求める問題を扱った。回路が2入力のXOR素子、またはその否定の素子のみから構成される場合には、その回路の出力パターンを多項式時間で数え上げ可能であることを示した。一方、回路が2入力のAND素子、OR素子、NAND素子、NOR素子などから構成される場合には、そのうちの1種類のみから構成される単純な回路であったとしても、出力パターンを数え上げることは計算困難(#P困難)であることを示した。以上の成果は査読付き国際会議 CATS'13にて発表を行った。電子情報通信学会コンピュータシミュレーション研究会においても発表を行った。

(3) 論理回路と密接な関係にあり回路計算量の研究において重要な、論理関数について以下の成果を得た。論理関数の感受度、プロ

ック感受度，保証複雑さは，論理関数の複雑さの尺度であり，他の論理関数の複雑さとの関係が知られている．それらについて，ユネイト関数と1回読み関数に限定すると，それら3つの値は等しいことを証明した．また，1回読み関数の場合の下界を明らかにした．以上の成果は査読付き国際会議 IFIP TCS'14にて発表を行った．電子情報通信学会コンピュータセッション研究会においても発表を行った．それとは別に，論理式が与えられたときに，その論理式が表す論理関数の感受度，ブロック感受度，保証複雑さを求める問題は，NP困難であることを証明し，情報処理学会アルゴリズム研究会にて発表を行った．

(4) 幅が制限された論理回路に対する単純な#SAT アルゴリズムを提案した．これは，本科研費の研究期間開始の頃に発見され，近年注目されている SAT アルゴリズムと回路計算量の密接な関係を背景としている．論理回路に対し自明なものより少しでも高速な SAT アルゴリズムを設計することが計算量クラス NEXP からの分離を意味する．さらに，幅が制限された論理回路の場合で得られた発想を拡張して応用し，段数が制限された論理式に対する単純な#SAT アルゴリズムも提案した．以上の成果は 2014 年度 冬の LA シンポジウムにて発表を行った．

以上のように，幅が制限された論理回路の研究を進める中で得られた発想をもとに，幅広い問題に対して複数の成果を得ることができた．(1) から (3) の成果はそれぞれ査読付きの国際会議に採録されており，一定の評価を得られたものと考えている．最も直接的に論理回路の幅に関連する (4) の成果は，本科研費の研究期間中には国内の学会発表にとどまったが，現在国際会議への論文投稿を準備しており，今後の展開が期待できると考えている．

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計3件)

Hiroki Morizumi, Sensitivity, Block Sensitivity, and Certificate Complexity of Unate Functions and Read-Once Functions, Lecture Notes in Computer Science 8705 (Proc. of the 8th IFIP TCS), pp. 104-110, 2014, 査読有  
DOI : 10.1007/978-3-662-44602-7\_9

Kei Uchizawa, Zhenghong Wang, Hiroki Morizumi and Xiao Zhou, Complexity of

Counting Output Patterns of Logic Circuits, Conferences in Research and Practice in Information Technology 141 (Proc. of the 19th CATS), pp. 37-43, 2013, 査読有  
<http://crpit.com/abstracts/CRPITV141Uchizawa.html>

Evgeny Demenkov, Alexander Kulikov, Ivan Mihajlin and Hiroki Morizumi, Computing All MOD-Functions Simultaneously, Lecture Notes in Computer Science 7353 (Proc. of the 7th CSR), pp. 81-88, 2012, 査読有  
DOI : 10.1007/978-3-642-30642-6\_9

[学会発表](計5件)

森住 大樹, 幅限定回路と段数限定論理式に対する単純な#SAT アルゴリズム, 2014 年度 冬の LA シンポジウム, 2015 年 1 月 28 日 ~ 30 日, 京都大学 (京都府京都市)

Hiroki Morizumi, On Zero-Suppressed Binary Decision Diagrams and Complexity Theory, 電子情報通信学会コンピュータセッション研究会, 2014 年 12 月 5 日, 崇城大学 (熊本県熊本市)

Hiroki Morizumi, On Computing Sensitivity, Block Sensitivity, and Certificate Complexity for Boolean Formulas, 情報処理学会アルゴリズム研究会, 2014 年 3 月 3 日 ~ 4 日, 中央大学 (東京都文京区)

Hiroki Morizumi, Sensitivity, Block Sensitivity, and Certificate Complexity of Unate Functions and Read-Once Functions, 電子情報通信学会コンピュータセッション研究会, 2013 年 12 月 20 日 ~ 21 日, 沖縄産業支援センタ (沖縄県那覇市)

Kei Uchizawa, Zhenghong Wang, Hiroki Morizumi and Xiao Zhou, Complexity of Counting Output Patterns of Logic Circuits, 電子情報通信学会コンピュータセッション研究会, 2013 年 5 月 17 日 ~ 18 日, 小樽商科大学 (北海道小樽市)

[図書](計0件)

[産業財産権]  
出願状況 (計0件)

取得状況 (計0件)

[その他]  
なし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

森住 大樹 (MORIZUMI, Hiroki)  
島根大学・総合理工学研究科・助教  
研究者番号：50463782

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし