

科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 30 日現在

機関番号：12608

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2012

課題番号：23710164

研究課題名（和文） 日本の公的年金運用のための最適化手法の開発

研究課題名（英文） Development of optimization techniques for the Japanese Public pension fund

研究代表者

北原 知就 (Kitahara Tomonari)

東京工業大学・大学院社会理工学研究科・助教

研究者番号：10551260

研究成果の概要（和文）：高齢化社会の進展する日本において、公的年金の安定は重要な課題である。本研究では、安定な公的年金運用のための最適化技術の開発を目指した。本研究により、現在日本の公的年金で用いられている平均分散モデルの定量的な性質が明らかとなった。また、公的年金運用において現れる数理的問題を解くためのアルゴリズムの理論的性質を明らかにした。

研究成果の概要（英文）：Since population aging has been rapidly advancing in Japan, stability of the public pension system is important. In this research, I aimed at developing optimization techniques needed in the management of the public pension fund in Japan. As a result of this research, I show quantitative properties of the Mean-Variance Model, which is currently used in the management of the Japanese public pension fund. I also analyzed some algorithms for solving mathematical programming problems which appear in the management of the pension fund, and I proved several theoretical properties of the algorithms.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
交付決定額	1,100,000	330,000	1,430,000

研究分野：複合新領域

科研費の分科・細目：社会・安全システム科学・社会システム工学・安全システム

キーワード：OR・公的年金運用

1. 研究開始当初の背景

年金積立金管理運用独立行政法人 (Government Pension Investment Fund, 以下 GPIF) は厚生年金保険法及び国民年金法の規定に基づき、厚生労働大臣から寄託された積立金の管理及び運用を行うとともに、その収益を国庫に納付することにより、厚生年金保険事業及び国民年金事業の運営の安定に資することを目的としている。GPIF は平成 21 年度で 120 兆円超の資産を有し、年金としては他を大きく引き離して世界一、金融界全体で見ても世界有数の大規模資産運用を行っている。

GPIF では国内債券、国内株式、海外債券、海外株式及び短期資産への分散投資を行っている。各資産への投資割合の目安となるものは基本ポートフォリオと呼ばれ、5 年に 1 回見直しが行われている。運用規模が超大であるため、基本ポートフォリオの策定に当たっては細心の注意が必要である。仮に 1 パーセント構成割合を変化させただけでも額にするとおよそ 1 兆 2000 億円となり、特に国内市場に多大な影響を与える。

GPIF では現在、基本ポートフォリオの決定のために、ノーベル賞経済学者 H. Markowitz が 1950 年代に提案した平均分散モデルを用

いている。平均分散モデルは理論的に美しいが、これを実際に使用する際の問題点がいくつか指摘されている。その主なものとして、出力されるポートフォリオが入力データの変化に対して敏感に反応してしまうというものがある。先述したようにポートフォリオの大幅な変化は好ましくないため、収益性と安定性を共に有するポートフォリオの設計が重要な問題となる。このようなトピックは、社会的に重要であるにもかかわらず、あまり研究が行われていないのが現状である。

2. 研究の目的

本研究では、GPIFの基本ポートフォリオ策定のための最適化技術を開発し、将来的に安定した日本の公的年金制度の設計に資することを目的とした。具体的には、(1)入力パラメータの変化に対して頑健なポートフォリオを出力するロバストポートフォリオ最適化モデルの開発と(2)年金運用を長期的に捉え、超大規模多期間計画問題に対する効率的アルゴリズムの開発を目指した。

(1)ロバストポートフォリオ最適化モデルの開発：平均分散モデルではポートフォリオ決定に際し、2種類の入力データを必要とする。1つ目は、資産パラメータと呼ばれ、資産の平均収益率ベクトルと分散共分散行列がある。2つ目は、モデルパラメータと呼ばれ、ポートフォリオの目標収益率とポートフォリオのリスク水準がある。平均分散モデルによるポートフォリオがパラメータに対して敏感に反応することは古くから認識されていたが、この問題に対してGPIFは現状うまく対応できていない。そこで本研究ではパラメータの変動に対して頑健な(ロバストな)ポートフォリオ最適化モデルを開発する。これにより、ポートフォリオの更なる安定化が期待できる。

(2) 超大規模多期間計画問題に対する効率的アルゴリズムの開発：現状ではGPIFは5年間を1期の運用期間と見ており、5年間の間にどのようなことが起こるかということが考慮されていない。しかし、モデルを現実に近づけるためには、景気の変動や人口動態などを考える必要がある。多期間計画法では将来どのようなことが起こるか想定した上で現時点での決定を行う。主な多期間モデルとしてシナリオツリーモデルがある。シナリオツリーモデルは、将来のある時点(t 時点)での意思決定は、 t 時点までにどのような状態が生じたか、 t 時点の状態を前提にして $t+1$ 時点以降にどのような状態が生じるかという2点を考慮して決められるという考え方をモデル化している。シナリオツリーモデルは直感的にわかりやすいが、不確実性を離散

的に記述しているため、シナリオ数を多くすると問題の規模が指数的に増大してしまうという問題点がある。

多期間資産運用問題をシナリオツリーモデルで定式化すると、線形計画問題になることが知られている。

公的年金運用に際しては細心の注意が必要であり、多数のシナリオを想定する必要があるが、既に述べたようにシナリオ数を多くするとこのような問題は超大規模になり、既存の方法で解くことができなくなる。しかし、この線形計画問題は係数行列が疎(ゼロ要素が多い)という性質があるため、内点法というアルゴリズムによって解ける可能性がある。そこで、問題の構造および内点法の性質を解析し、このような線形計画問題に特化した内点法アルゴリズムを開発する。

3. 研究の方法

本研究の目的の達成のために、以下の計画・方法で研究を進めた。(1)平均分散モデルの解と入力パラメータとの関連構造を解析し、それを踏まえたロバストポートフォリオ最適化モデルを開発する。(2) 超大規模多期間計画問題の構造の調査・および内点法の性質を解析し、効率的アルゴリズムを開発する。(3) 数値実験により、(1)、(2)の現実問題への応用を検証する。

(1) ロバストポートフォリオ最適化モデルの開発：平均分散モデルの解がパラメータの変動に対して敏感であることは古くより認識されていたが、そのメカニズムはまだよくわかっていない。そこで、実データを用いた数値実験および理論的解析の2方向からのアプローチによってこのメカニズムを把握する。

メカニズムの把握後、それを織り込んだロバストポートフォリオ最適化モデルを開発に着手する。また、モデルの実用性を高めるため、GPIF関係者からの聞き取り調査を行ない、モデル開発に反映させる。

(2) 超大規模多期間計画問題に対する効率的アルゴリズムの開発：既に述べたように、多期間資産運用問題は線形計画問題として定式化できる。公的年金運用に際しては細心の注意が必要であり、経済見通しや人口動態などに関して数多くのシナリオを想定する必要がある。しかしシナリオの数を多くすると、問題の規模が指数的に増大し、既存の方法では解けなくなってしまう。しかしながら、この線形計画問題の係数行列は疎(ゼロ要素が多い)という特徴がある。線形計画問題の解法の一つである内点法はこのような性質と相性が良いので、問題の構造と内点法をうまく結びつけることで超大規模の多期間計画

問題が解けるようになる可能性がある。

そこで、まず、超大規模多期間計画問題の構造を解析する。行列の疎性構造に関する既存研究と関連付けられないか検討する。

内点法は線形計画問題に対する解法のひとつで、特に大規模な問題を効率的に解けるということが知られている。そのため、超大規模多期間計画問題を解くための解法としてふさわしいと考えられる。前年度に把握した問題の疎性構造と内点法とをうまく組み合わせることを目指す。必要であれば内点法の理論面にまで立ち入り、上記目標に役立てる。その後、それまでの知見を元に超大規模多期間計画問題に対する効率的アルゴリズムを開発する。既に挙げた問題の構造および内点法の性質を生かし、アルゴリズムの効率化・スピードアップを目指す。

(3) 数値実験による検証

4. 研究成果

「ロバストポートフォリオ最適化モデルの開発」に対する成果

(1) 平均分散モデルの解と入力パラメータの関係について：平均分散モデルを用いてポートフォリオを決定するには、資産の収益率の平均ベクトルと分散共分散行列の2つのパラメータが必要で、これらはサンプルから推定する必要がある。一般に、パラメータの推定値を使って得られたポートフォリオは、真のパラメータを使って得られるポートフォリオに比べて性能が劣る。研究の目的で、このような問題が古くから認識されていると述べたが、それを定量的に分析した研究があまりないことが分かった。そこで本研究では、収益率が多変量正規分布に従っていると仮定することで、上記の事実を定量的に分析することができた。さらに、数値実験によって得られた理論的結果の検証を行った。

「超大規模多期間計画問題に対する効率的アルゴリズムの開発」に関連する成果

(2) 線形計画問題に対する内点法の理論的性質の解析：線形計画問題は数理計画問題の基礎をなす問題で、内点法は線形計画問題に対する効率的な解法の一つである。線形計画問題は、制約行列、制約ベクトル、目的関数ベクトルによって記述される。本研究では、予測子-修正子内点法の理論的反復回数が、適当な仮定の下で目的関数ベクトルによらない多項式オーダーであることを初めて証明した。

(3) 線形計画問題に対する単体法が生成する基底解の個数の上界について：単体法は、線形計画問題に対するもう一つの効率的な解法である。その効率性にもかかわらず、単

体法の反復回数に関する理論的研究はあまり行われてこなかった。本研究では、単体法によって生成される基底解の個数の上界を明示的に示した。この上界は、適切な仮定の下で反復回数の上界となる。このような結果はこれまで知られていない重要なものである。

(4) LP-ニュートン法の改良：LP-ニュートン法は線形計画問題に対する新しい発想に基づくアルゴリズムである。このアルゴリズムは理論的に優れた性質を持つことが期待される。LP-ニュートン法は特殊な入力形式の問題しか解くことができなかったが、本研究では一般的な線形計画問題を扱えるようにアルゴリズムを改良した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計8件)

(1) 北原知就, 水野眞治, On the number of solutions generated by the simplex method for LP, 査読有, Advances in Optimization and Control with Applications (Springer Book for the OCA Conference), 掲載決定.

(2) 北原知就, 水野眞治, An Upper Bound for the Number of Different Solutions Generated by the Primal Simplex Method with Any Selection Rule of Entering Variables, 査読有, Asia-Pacific Journal of Operational Research, 掲載決定.
DOI: 10.1142/S0217595913400125

(3) 北原知就, 水野眞治, 施建明, The LP-Newton method for standard form linear programming problems, 査読有, Operations Research Letters, 掲載決定.

DOI: 10.1016/j.orl.2013.05.004

(4) 北原知就, 水野眞治, A bound for the number of different solutions generated by the simplex method, 査読有, Mathematical Programming, 137, 2013, pp579-586.

DOI: 10.1007/s10107-011-0482-y

(5) 北原知就, 水野眞治, 単体法の計算量の新評価, 査読有, 日本オペレーションズ・リサーチ学会和文論文誌, 55, 2012年, pp66-83.

(6) 北原知就, 水野眞治, On the Number of Solutions Generated by the Dual Simplex Method, 査読有, Operations Research Letters, Vol. 40, 2012年, pp172-174.

DOI: 10.1016/j.orl.2012.01.004

(7) 北原知就, 松井知己, 水野眞治, On the Number of Solutions Generated by Dantzig's Simplex Method for LP with Bounded Variables, 査読有, Pacific Journal of Optimization, 8 (2), 2012年,

pp447-455.

(8) 北原知就, 水野眞治, Lower Bounds for the Maximum Number of Solutions Generated by the Simplex Method, 査読有, Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol. 54, No. 4, 2011年, pp191-200.

[学会発表] (計 13 件)

(1) 北原知就, 土谷隆(報告者), 平均分散モデルについて, 研究集会「最適化: モデリングとアルゴリズム」2013. 3. 11, 統計数理研究所(東京)

(2) 北原知就, 水野眞治, 施建明, 等式標準形に対するLP-ニュートン法, 研究集会「最適化: モデリングとアルゴリズム」2013. 3. 11, 統計数理研究所(東京)

(3) 北原知就, 水野眞治, The Simplex Method and the Diameter of a 0-1 Polytope INFORMS Annual Meeting 2012, 2012. 10. 15, Phoenix Convention Center (USA)

(4) 北原知就, 水野眞治, A proof by the simplex method for the diameter of a $(0, 1)$ -polytope, The 21st International Symposium on Mathematical Programming (ISMP 2012), 2012. 8. 23, Berlin Institute of Technology (Germany)

(5) 北原知就, 水野眞治, 多面体の直径と単体法, 研究集会「最適化: モデリングとアルゴリズム」2012. 3. 15-16, 政策研究大学院大学(東京)

(6) 北原知就, 水野眞治, 単体法の計算量の新評価, 第 23 回 RAMP シンポジウム, 2011. 10. 24-25, 関西大学(大阪)

(7) 北原知就, 水野眞治, 双対単体法によって生成される基底解の数の上界について, 京都大学数理解析研究所(RIMS)研究集会「最適化手法の深化と広がり」2011. 7. 21-22, 京都大学(京都).

(9) 北原知就, 水野眞治, 単体法によって生成される基底解の数の上界とその初等的証明, OR若手横断の会(KSMAP)第8回研究集会, 2011. 6. 4, 京都大学(京都).

(9) 北原知就, 水野眞治, A Bound for the Number of Different Basic Solutions Generated by the Simplex Method, SIAM conference on Optimization, 2011. 5. 16-19, Darmstadtium Conference Center (ドイツ).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

北原 知就 (Kitahara Tomonari)

東京工業大学・大学院社会理工学研究科・助教

研究者番号: 10551260

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし