様式Ｆ－１９

科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）研究成果報告書

平成 24 年 6 月 14 日現在

機関番号：32693
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2012
課題番号：23730297
研究課題名（和文）確率微分方程式の高次弱近似を可能にする数値解法とその数理ファイナンスへの応用
研究課題名（英文）Research for simulation schemes of stochastic differential equations and its application to mathematical finance.
研究代表者
二宮 真理子(NINOMIYA MARIKO)
日本赤十字看護大学 兼任講師
研究者番号：70580827

研究成果の概要（和文）：数理ファイナンスなど様々な分野において確率微分方程式の計算の高速化が必要となっている。楠岡が提案した高次弱近似手法(楠岡近似)は理論上これを実現するものであり、研究代表者と二宮(祥一)はこれを実行するためのアルゴリズム(NN アルゴリズム)を構築した(2009)。本研究ではその理論研究と数値実験を行った。
理論研究により、NN アルゴリズムの中で用いられる確率変数の分散共分散行列の満たすべき条件式の数を減らせる可能性を発見した。また、NN アルゴリズムの中で用いられている積分手法の拡張可能性を証明した。また、数値実験により楠岡近似の適用範囲の拡大を行った。更に、実務における楠岡近似の普及を念頭にソフトウェアライブラリを作成、公開した。

研究成果の概要（英文）：Numerical calculation of stochastic differential equations has been applied in many fields such as mathematical finance. However, there has been a difficulty of speeding up of calculation. The higher-order approximation of SDEs introduced by Kusuoka (Kusuoka approximation) theoretically gives the possibility of improvement of this problem. The research representative and Syoiti Ninomiya successfully constructed an algorithm (NN algorithm) of the Kusuoka approximation (2009).
The research representative found that the numbers of conditions for variance-covariance matrix could be drastically reduced and proved the possibility of extension of the integration scheme applied in the NN algorithm as well as showed that the range of application of the Kusuoka approximation can be extended. Also, software library of higher-order approximation including the NN algorithm was constructed and released for its spread.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
交付決定額	1,500,000	450,000	1,950,000

研究分野：社会科学
科研費の分科・細目：経済学 財政学・金融論
キーワード：確率数値解析、高次弱近似、数理ファイナンス

１．研究開始当初の背景
確率微分方程式の弱近似は近年様々な分野において用いられている。これは以下のような拡散過程

$$X(t,x) = x + \int_0^t V_0(X(s,x))ds + \sum_{i=1}^{d}\int_0^t V_i(X(s,x)) \circ dB_i(s)$$

に対し、E[f(X(1,x))を数値的に求めることを言う。ここで、f はある滑らかさを持つ関数であり、$B_0(t) = t$，$(B_1(t),\ldots,B_d(t))$は d 次元標準ブラウン運動、$\circ dB(t)$は Stratonovich 積分、$Vi \in C_b^\infty(R^N;R^N)$である。特に数理ファイナンスの分野においては X(t,x)がある資産の時刻 t での価格を表し、f

がXを原資産とする商品の利得を表すとするとき、 時刻 T でのその商品の価格はE[f(X(T,x))によって得られるため、弱近似の計算が日々大量に行われている。

弱近似の問題に対しては偏微分方程式(PDE)アプローチと呼ばれるものと，シミュレーションによる近似がある。研究代表者は後者の研究に関心を持っている。この計算は離散化と数値積分から成る。

通常用いられる離散化の手法は、ある条件の下で離散化幅に対する誤差の減少のオーダーが 1 であるような弱近似(「1 次の弱近似」)となる Euler—丸山法である。

楠岡の提案した高次弱近似手法([1])をLyons と Victoir が[4]において自由 Lie 代数の概念を用いて発展させ、Wiener 空間上のcubature formula という理論を確立した。その結果を受けて[1]を自由Lie代数によって更に発展させたものが[2]である。[7]においてこの高次弱近似法は初めてファイナンス の問題に適用された。そこでの近似の実行にあたっては離散型確率変数が用いられた。また扱われたモデルは1次元ブラウ運動を持つもののみであった。

研究代表者は[5]においてこれを非可換なベクトル場$\{V_j\}_{j=0}^{d}$を持つファイナンスの問題へ適用した。離散型確率変数を用いるこの実行方法では、高速計算手法(QMC)の適用ができない。そこでは tree-based branching algorithm を適用することによりMonte-Carlo 法の高速化に成功した。ここで取り上げたモデルではブラウン運動が2次元であったが、楠岡近似の構成の為には膨大な量の記号計算が発生した。つまり、この方法で、より一般的な問題にアプローチするのには実用上大きな障害があると考えられた。

[8]において二宮(祥一)—Victoir によって楠岡近似に対する新しい2次の弱近似の実行方法(NV アルゴリズム)が提案された。このアルゴリズムは実際に2次元ブラウン運動を持ちベクトル場が非可換なファイナンスの問題に適用され、計算時間の劇的な高速化に成功した。

研究代表者は[7]においてこの NV アルゴリズムを含むような一般的なアルゴリズムの族が高次弱近似を与えることを示し、同時にこの族に含まれるNVアルゴリズムとは異なる新しい2次の弱近似のアルゴリズム(NNアルゴリズム)を提案した。このアルゴリズムを実際にNVアルゴリズムの適用例と同じファイナンスの問題に適用したところ計算速度は更に向上した。

NVアルゴリズムとNNアルゴリズムは、自由 Lie 代数の組に値を取るような Gauss型確率変数で、それらの積分曲線を繋ぎ合わせたものの期待値が高次の近似となっているようなものを構成するというものである。このような確率変数が構成されればその抜き出しは常微分方程式の積分曲線を繋ぎ合わせたものとなるので、常微分方程式に対する数値解法をそのまま適用することができるという点が重要である。NV アルゴリズム、NN アルゴリズムは、更に外挿法と併わせて3 次の弱近似を容易に実現できることも示される([3])。

NV アルゴリズム、NN アルゴリズムがファイナンスの問題に対して非常に有用であることは数値実験等により示されてきたが、実務の場に於ける普及にあたっては本手法の理論的な部分の分かり難さが普及の妨げとなっているようである。

[1] Shigeo Kusuoka. Approximation of Expectation of Diffusion Process and Mathematical Finance. In T. Sunada,, editor, Advanced Studies in Pure Mathematics, Proceedings of Final Taniguchi Symposium, Nara 1998, volume 31, pages, 147--165, 2001

[2] Shiceo Kusuoka. Approximation of Expectation of Diffusion Proccesses bsed on Lie Algebra and Malliavin Caculus. Advances in Mathematical Economics, 6:69—83, 2004.

[3] Shigeo Kusuoka. Gaussian K-scheme: justification for KLNV method. Advances in Mathematical Economics, 17:71—120, 2013.

[4] Terry Lyons and Nicolas Victoir. Cubature on Wener Space. Proceedings of the Royal Society of London Series A. Mathematical and Physical Sciences, 460:169—198, 2004.

[5] Mariko Ninomiya. Application of the Kusuoka approximation with a tree-based branching algorithm to the pricing of interest-rate derivatives under the HJM model. LMS Journal of Computation and Mathematics, 13:208—221, 2010.

[6] Mariko Ninomiya and Syoiti Ninomiya. A new weak approximation scheme of stochastic differential equations by using the Runge—Kutta method. Finance and Stochastics, 13(3):415—443, 2009.

[7] Syoiti Ninomiya. A new simulation scheme of diffusion processes: Application of the Kusuoka approximation to Finance Problems. Mathematics and Computers in Simulation, 62/3-6:479—486, 2003.

[8] Syoiti Ninomiya and Nicolas Victoir. Weak Approximation of Stochastic Differential Equations and Application to Derivative Pricing. Applied Mathematical Finance, 15:107—121, 2008.

２．研究の目的
(1) NN アルゴリズムは近似の次数を 2 に限定した上で構築されたアルゴリズムであるが、近似のための確率変数の一般的な構成方法についてはまだ何も知られていない。次数と確率変数の構築の理論的な関係は非常に複雑であるが、それが解明されればより高次の楠岡近似のアルゴリズムが得られる可能性があるため、研究代表者はその手掛りをつかみたいと考えた。

(2) NN アルゴリズムでは、抜き出された常微分方程式に対する数値解法として陽的 Runge—Kutta 法を用いている。また、NV アルゴルズムにおいても、常微分方程式の解が存在しない場合には同様である。しかしその枠を広げ、陰的 Runge—Kutta 法が適用であることが示されれば、同じ次数に対しても段階数が減らせるため、計算速度を更に上げられる可能性がある。

(3) 楠岡近似の普及の遅れはその理論とアルゴリズムの複雑さが原因の 1 つと考えられる。そこで、実務家や研究者が容易に楠岡近似を用いたプログラムを組めるよう、ソフトウェアライブラリを公開し、ドキュメントを作成する必要があると考えられる。
　このライブラリの作成において重要なのは、ライブラリを使用する側が、ライブラリをブラックボックスのように考えて使うことができるようにすることである。具体的には、ベクトル場を C 言語の関数として書いて与えるだけで計算が行われるようなものを作ることが目標となる。

(4) 楠岡近似の適用対象はいわゆるヨーロッパ型オプションと呼ばれるものであるが、実務に於ては種々の経路依存型オプション(バリアー型やアメリカ型オプションなど)も重要である。特にバリアー型オプションへの適用が可能であることが示されれば実務的にも大きなインパクトとなる。

(5) NV アルゴリズムにおいて抜き出される常微分方程式は 1 つ 1 つが非常に単純な形をしており、各常微分方程式に解が存在ることもしばしばある。そのため、そのような常微分方程式に対しては Runge-Kutta 法を用いずに直接解の計算を行う。これは計算速度の高速化の観点から大きなメリットと言える。
　一方、NN アルゴリズムでは、もとのベクトル場から新たに構成した複雑な形をした常微分方程式の計算を 2 回だけ行う。この常微分方程式の複雑さから、解が存在する場合を考慮せずにすべての問題に対して Runge-Kutta 法を適用することを前提にソフトウェアライブラリを構築した(4. 研究成果(3))が、対象とする確率微分方程式によってはNNアルゴリズムにおいてもRunge-Kutta法を経由せずに直接常微分方程式の解を用いることができるものが存在する為(3.研究の方法-(5)を見よ)、そのようなものに対しては効率的な計算方法を選択できるようライブラリを改良する必要がある。

３．研究の方法
(1) 次数と確率変数の構築の一般的な関係の解明については、NN アルゴリズムを構築した際にみた規則性をヒントに、分散共分散行列の満たすべき条件式の冗長性を探すべく、ベクトル場のもつ特徴を組み合わせていった。

(2) NV アルゴリズム、NN アルゴリズムにおける陽的 Runge-Kutta 法の適用可能性についての証明は既に[6]で完成したが、その証明を一般化することにより陰的 Runge-Kutta 法の適用可能性を考えた。

(3) NV アルゴリズムと NN アルゴリズムの実務での普及と研究の活性化を目的とし、NV アルゴリズム、NN アルゴリズム、Euler-Maruyama 法(1 次の弱近似)の 3 種類の計算が可能なソフトウェアライブラリを構築し公開した。

(4) killing function と呼ばれる、境界にヒットする確率を与える関数を用いることにより、本来の楠岡近似の適用対象外であったバリアー型オプションへの楠岡近似の適用を行った。

(5) NN アルゴリズムを使用する際に、問題によっては速度返還によって、抜き出されるベクトル場のせきぶん が容易に得られる場合があることが二宮(祥一)-久保らの研究で示された([1])。これに対応できるよう、 ソフトウェアライブラリの中の、NN アルゴリズムの部分に常微分方程式の解の設定ができる領域を作った。

[1] Syoiti Ninomiya. On the higher-order weak approximation of SDEs. The 3rd Workshop on numerical methods for solving the filtering problems and high order mathods for solving parabolic PDEs. Oxford University, 2012.

４．研究成果
(1) NN アルゴリズムの確率変数の構築の際に出てきた様々な規則性を下に、確率変数の分散共分散行列の満たすべき条件式は大幅に減らせることが分かったが、実際に次数を決

めれば直ちに確率変数の構成ができるというレベルには至っていない。

(2) NV アルゴリズム、NN アルゴリズムにおいて、抜き出された常微分方程式を解く際に用いる解法として，陰的Runge-Kutta法の適用が可能であることの証明は完成した。

(3) 2次の弱近似アルゴリズムであるNVアルゴリズムとNNアルゴリズム、また1次の弱近似手法である Euler-Maruyama 法の合計 3 種類の計算が可能なソフトウェアライブラリとドキュメントを公開した(5.主な発表論文等［その他］ホームページ等 参照)。

(4) バリアー型オプションの数値実験から、NV アルゴリズム、NN アルゴリズム共に計算の高速化に大きく貢献していると思われる結果が得られた([1])。

(5) NNアルゴリズムにおいて、抜き出された常微分方程式の解が存在する場合はRunge-Kutta 法を回避することで計算時間を短縮するようライブラリの NN アルゴリズムの部分を改良した。

[1] Shigeo Kusuoka, Mariko Ninomiya, and Syoiti Ninomiya. Application of the Kusuoka approximation to barrier options. Preprint, 2012

今後の展開
(1) NN アルゴリズムにおいて陰的Runge-Kutta 法を用いる数値実験を行い、証明と共に発表したい。また、計算時間の短縮が可能な場合は現在のソフトウェアライブラリに陰的Runge-Kutta法を盛り込む必要がある。

(2)現在公開しているソフトウェアライブラリは、研究者やプログラミングに精通した(主に金融の)実務家向けのものとなっている。高次弱近似の適用は金融以外の様々な分野において求められている為、本ライブラリの改良により貢献したい。

(3)バリアー型オプションの数値計算で得られた結果は、非常に高い精度での議論が必要であるため、今後更にデータを集める必要がある。またベクトル場を変化させることで結果がどの程度影響を受けるか、などの実験も加えていく必要がある。

(4)NN アルゴリズムを用いる際にRunge-Kutta 法の経由の設定が変えられるよう改良したライブラリを公開すると同時に、実際にそのような問題に対して数値実験を行い発表したい。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　０件）

〔学会発表〕（計　２件）
1. 二宮祥一、”確率微分方程式の楠岡近似を実現するソフトウェアライブラリ”、情報化ネットワーク社会に向けた高度な専門的数理技術ライブラリの研究と開発 2008-2012 年度文部科学省科学研究費補助金基盤研究(A)20241038 シンポジウム、2012 年 11 月 28 日ー29 日、東京工業大学理財工学研究センター
2. 二宮真理子、” 確率微分方程式の高次弱近似(楠岡近似)用プログラムライブラリの公開と使用法のチュートリアル”、CARF セミナー、2011 年 12 月 1 日、東京大学経済学研究科

〔その他〕
ホームページ等
ソフトウェアライブラリ
https://sites.google.com/site/marikoninomiya/

ワーキングペーパー
http://www.carf.e.u-tokyo.ac.jp/workingpaper/detail.cgi_3fcf1af57528e6c8f9b6693ce95e5251c7.html

http://www.carf.e.u-tokyo.ac.jp/workingpaper/detail.cgi_3f97f8d45cc4ed18573cc0b68ea7a81f95.html

６．研究組織
(1)研究代表者
二宮 真理子 (NINOMIYA MARIKO)
日本赤十字看護大学 兼任講師
研究者番号：70580827

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：

(4)研究協力者
二宮 祥一 (NINOMIYA SYOITI)

東京工業大学大学院
イノベーションマネジメント研究科 教授
研究者番頭 ： 70313377