科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １７ 日現在

機関番号：１３１０３
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３７３０８２６

研究課題名（和文）学校数学における証明の生態の国際比較研究：日仏米の教科書と学習指導要領の分析から

研究課題名（英文）Comparative study on the ecology of proof in school mathematics through the analysis of mathematics textbooks and national curricula of Japan, France, and USA

研究代表者
宮川　健（Miyakawa, Takeshi）

上越教育大学・学校教育研究科（研究院）・准教授

研究者番号：３０３７５４５６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,300,000円、（間接経費）　990,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では，日本・フランス・米国の中等教育数学（主に前期）における証明の実際の扱い（生態）と，それぞれの扱いを生じさせている様々なレベルの要素（数学的，カリキュラム的，社会的，etc.）を，各国の数学教科書と国定カリキュラムの分析を通して探った．その結果，各国では証明の形態をはじめ，証明の機能等が異なること，そうした結果が種々の要素に起因していることが明らかになった．特に，フランスと日本では証明の存在理由が異なり，それにより異なった生態を生じさせていることが明らかになった．

研究成果の概要（英文）：The aim of this study is to explore the ecology of proof in school mathematics of three different countries: France, US, and Japan. Through the analysis of mathematics textbooks and national curricula, I identified first several differences in the forms of proof and the functions of proof, and second different elements (conditions and constraints) that result in these natures of proof. In particular, I have shown that the "raisons d'etre" of proof, that is the reason why the proof is necessary in mathematics, are different in France and in Japan.

研究分野：数学教育学

科研費の分科・細目：教育学・教科教育学

キーワード：証明　比較研究　フランス　アメリカ　前期中等学校

１．研究開始当初の背景

(1) 証明研究

1970 年代以降, 証明学習を主題とした研究が内外で多く進められてきた (cf. Boero (Ed.), 2007). 証明の本性を探り，証明の異なる種類や数学における役割・機能を特定し，学校数学へ様々な提言がなされた (cf. Hanna, 2000). その一方で，それらの研究により，証明学習の何らかの問題が解決されたという明るい話はあまり聞かれない．わが国では，全国的な学力調査の結果などから，子どもが論証の意義を感得していないことや論証が形式的な指導に陥っていることなど，論証の学習及び指導の困難性が今日も指摘されている．このままでは，証明が学校数学から消える可能性もあろう．一方，私は，証明学習の困難性の要因が，指導方法にのみではなく，証明が指導される数学領域の構成とそこでの証明の扱いにもあると考える．実際，いくら素晴らしい指導方法を開発しても，指導内容である数学の体系が証明を必要としない限り，証明が学校数学に確固とした存在意義をもって生息することはできない．そこで，本研究は，教科書及び学習指導要領（国定カリキュラム）の分析により，証明が扱われる数学領域（平面幾何）の構成，証明の位置づけ，実際の機能・役割を明らかにし，それらを生じさせている様々なレベルの制約と条件を探る．特に，わが国の証明指導の特徴を浮き彫りにし，かつ証明指導の別の可能性を示すため，フランスと米国の証明指導を比較対象として同様に分析する．

(2) 知の生態学

本研究では，「生態」や「生息」，「条件と制約」など，やや奇妙な言葉を用いる．これは，生態学の考えを学校数学などの知の体系に援用した，Chevallard (1992; 1994) による「教授の人間学理論」（以下，人間学理論）における「知の生態学」で用いられる言葉である．生態学では，生物はそれを取り巻く環境に，その環境に生息する生物群集と互いに役割をもって生息し，生物がある生態系に生息するためには，環境の制約に従い，生態系における役割など生息するための条件を満たさなければならない，とする．知の生態学では，これと同様に，数学概念もそれを取り巻く知の体系の中に他の数学概念と互いに役割をもって存在しており，ある数学概念が学校数学の指導内容となるためには，数学の内的な整合性や教育の目標，社会の要求など，様々な制約に従い，指導内容となるための条件を満たさなければならないと考える．本研究では，この知の生態学を手掛かりに，学校数学という知の体系の中に生息している証明の生態の解明を試みる．証明が扱われる領域の構成が異なればその役割・機能も異なると想定されるため，国際比較研究をすることで，証明の異なった複数の生息の仕方を明らかにし，それらに導く制約と条件を探る．

２．研究の目的

本研究の目的は,「知の生態学」を手掛かりに，日本・フランス・米国の中等教育（主に前期）で用いられている数学教科書及び学習指導要領を分析することにより，当該 3 ヶ国における平面幾何領域の構成とそこでの証明の実際の扱い（生態）を明らかにし，それぞれの扱いを生じさせている様々なレベルの条件と制約（数学的，カリキュラム的，社会的，etc.）を探ることである．本研究により，わが国のみならず他国においても，証明指導にかかわるカリキュラムの開発・改善を行なう際に参考としうる，証明の扱いの異なった可能性と証明指導の異なった意義・論拠を示すことができると考える．

３．研究の方法

上記の本研究の目的を達成するため，各国の教科書と学習指導要領（国定カリキュラム）を人間学理論を枠組みに分析する．具体的には，まず分析の対象となる教科書等を収集するとともに，人間学理論にもとづき本研究に適した分析枠組みを構築する．そして，各国の教科書を分析することにより平面幾何の構成，証明の生息地，証明の実際の機能・役割を明らかにする．さらに学習指導要領をはじめとするカリキュラム関連の資料を分析することにより，証明の想定された機能・役割と生息のための「条件と制約」を明らかにする．

本研究の主な課題は次の 4 つである．

- 分析する教科書・学習指導要領の収集
- 分析枠組み（ツール）の構築
- 教科書と学習指導要領の分析
- 成果発表（学会発表・論文執筆）

４．研究成果

(1) 分析枠組み（ツール）の構築

本研究は，上で述べたように,「教授の人間学理論」の「知の生態学」という考えに基づき研究を進める．そして,「証明の生態」とそれを生じさせる「条件と制約」といった 2 つのことを明らかにする．ただし,「知の生態学」は，‘何を分析すればよいか’という研究の指針を示す研究枠組みであり,‘いかに分析すればよいか’を示す分析枠組み（ツール）ではない．そのため，分析の際には，人間学理論の様々な概念を援用し，それを教科書分析に適合させる必要があった．

そこで,「証明の生態」の記述のためには，知の体系において当該対象が存在する場所や領域を表わす「生息地 (habitat)」, その場所において当該対象が果たす機能を意味する「ニッチ (niche)」，数学の知を体系的に記述する「プラクセオロジー (praxeology)」という概念を援用することとした．ただ，証明の機能（ニッチ）については，ものによっては，それ自体が証明を学校数学に存在させてい

る理由となっているため，さらに「存在理由(raison d'être)」という概念を用いることにした．一方，「条件と制約」については，「決定レベル」という概念を援用することとした．

このような概念を用いて，教科書と国定カリキュラムを分析する手順を構築した．具体的には，教科書の分析においては，平面幾何の全体像の把握，証明の生息地の特定，証明の実際の形態，証明の機能・役割の特定する．学習指導要領などのカリキュラム関連の資料の分析においては，国定カリキュラム等で証明に期待された機能・役割，数学や幾何領域など指導内容の捉え方などを特定し，証明の生態に影響を与えている「条件と制約」を明らかにする．

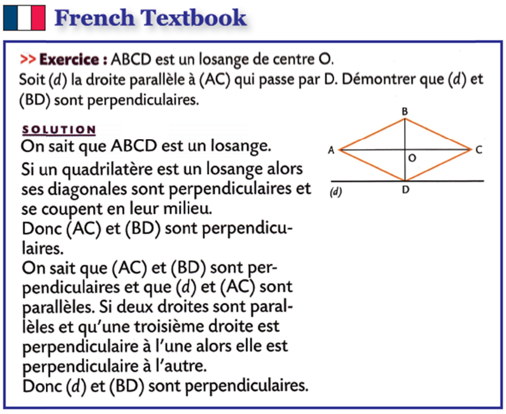
ただ，概念によっては，分析に十分取り入れることができなかったものもあった（例えば，プラクセオロジー）．

(2) 証明の形態

日本・フランス・米国，三ヶ国の中等教育の数学教科書（米国は幾何教科書）を分析し，証明の形態をはじめ，生息地，機能等を検討した．分析は，日本とフランスのものを中心に進め，この二ヶ国の分析がある程度済んでから米国のものを分析した．そのため，全体を通して，米国についての分析は少ない．

分析の結果，種々の視点から，各国において様々な差異が見られた．何を「証明」と呼ぶかについても異なった．以下では，分析結果の代表的なものを，証明の形態，機能，条件と制約に焦点を絞り示す．

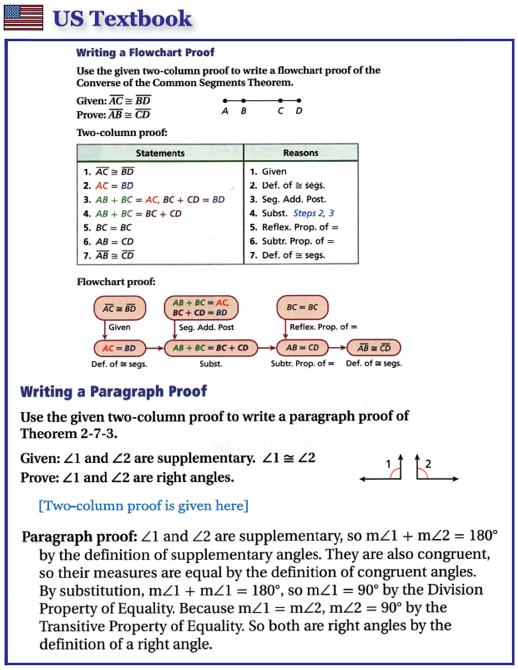
証明の形態については，三ヶ国各々において，大きく異なった．以下に示した図からその雰囲気がわかるが，フランスの証明は，「パラグラフ証明」と呼ばれるもので，根拠となる事柄を if-then 形式で文章を書かなければならなく，文章であることを徹底したようなものであった．一方，米国の証明は，パラグラフ証明を始め，「フローチャート証明」，「two-column 証明」など，複数の形態を持つものであった．さらに，日本の証明は，パラグラフ証明と two-column 証明の間に位置する「半パラグラフ証明」と呼べるようなものであった．


French Textbook

>> **Exercice :** ABCD est un losange de centre O.
Soit (*d*) la droite parallèle à (AC) qui passe par D. Démontrer que (*d*) et (BD) sont perpendiculaires.

SOLUTION
On sait que ABCD est un losange.
Si un quadrilatère est un losange alors ses diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu.
Donc (AC) et (BD) sont perpendiculaires.
On sait que (AC) et (BD) sont perpendiculaires et que (*d*) et (AC) sont parallèles. Si deux droites sont parallèles et qu'une troisième droite est perpendiculaire à l'une alors elle est perpendiculaire à l'autre.
Donc (*d*) et (BD) sont perpendiculaires.

図 1　フランスの証明（*Triangle*，第 8 学年）


US Textbook

Writing a Flowchart Proof

Use the given two-column proof to write a flowchart proof of the Converse of the Common Segments Theorem.

Given: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$
Prove: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Two-column proof:

Statements	Reasons
1. $\overline{AC} \cong \overline{BD}$	1. Given
2. $AC = BD$	2. Def. of ≅ segs.
3. $AB + BC = AC$, $BC + CD = BD$	3. Seg. Add. Post.
4. $AB + BC = BC + CD$	4. Subst. *Steps 2, 3*
5. $BC = BC$	5. Reflex. Prop. of =
6. $AB = CD$	6. Subtr. Prop. of =
7. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	7. Def. of ≅ segs.

Flowchart proof:

Writing a Paragraph Proof

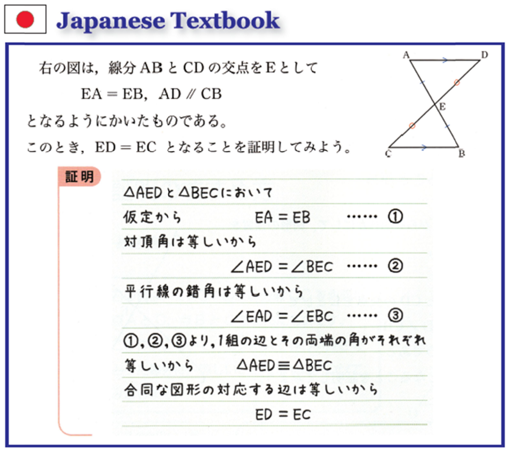
Use the given two-column proof to write a paragraph proof of Theorem 2-7-3.

Given: $\angle 1$ and $\angle 2$ are supplementary. $\angle 1 \cong \angle 2$
Prove: $\angle 1$ and $\angle 2$ are right angles.

[Two-column proof is given here]

Paragraph proof: $\angle 1$ and $\angle 2$ are supplementary, so $m\angle 1 + m\angle 2 = 180°$ by the definition of supplementary angles. They are also congruent, so their measures are equal by the definition of congruent angles. By substitution, $m\angle 1 + m\angle 1 = 180°$, so $m\angle 1 = 90°$ by the Division Property of Equality. Because $m\angle 1 = m\angle 2$, $m\angle 2 = 90°$ by the Transitive Property of Equality. So both are right angles by the definition of a right angle.

図 2　米国の証明 (*Holt Geometry*)


Japanese Textbook

右の図は，線分 AB と CD の交点を E として

EA = EB，AD // CB

となるようにかいたものである。

このとき，ED = EC となることを証明してみよう。

証明

△AED と △BEC において
仮定から　EA = EB　……①
対頂角は等しいから
∠AED = ∠BEC　……②
平行線の錯角は等しいから
∠EAD = ∠EBC　……③
①，②，③より，1組の辺とその両端の角がそれぞれ
等しいから　△AED ≡ △BEC
合同な図形の対応する辺は等しいから
ED = EC

図 3　日本の証明（東京書籍　中 2）

(3) 証明の機能

証明の機能については，特にフランスと日本の証明について検討した．証明の機能は，数学教育学の先行研究により様々なものが指摘されてきた．例えば，正当化，説明，体系化，コミュニケーション，発見などである．日仏教科書の比較分析により，両国の証明がこれら代表的な機能を果たしていることがわかった．しかしながら，興味深いことに，その機能の果たし方が種々の点において異なることが明らかになった．以下に代表的な結果を示す．

ある事柄が正しいことを示すという正当化の機能に関しては，日本では，証明は一般性を示すため，つまり無数の場合においてもある性質が成り立つことを示すために証明が用いられる．例えば，三角形の内角の和の性質については，測定では有限個の場合しか確認できないため，証明が無限個の場合を確認してくれるというのである．フランスにおける証明は，この一般性の保証の機能も果た

すものの，正当化の機能として，さらに視覚に頼らないで事柄が正しいことを示すという機能が見られた．つまり，図は図形の表現でしかなく正確ではないため，そこで確認されたものは必ずしも正しいとは限らない．だからこそ，証明が用いられるのである，といった考えである．このことは，わが国の証明指導の視点から大変興味深い結果である．すなわち，このことは，一般性の保証という機能を証明に付与せずとも，証明の存在意義があることを示している．

さらに，体系化の機能においては，日本の中学校の図形領域では，準公理的な体系を構築するために証明が必要とされている．ところが，フランスでは，公理的な体系を構築するという目標となっておらず，定理によっては，証明なしに「認める」と宣言されるものもあった．ただし，証明が体系化の機能をもたないわけではなく，その機能の仕方が異なった. 教科書では, 一つの図形性質（例えば, 平行，垂直，中点など）を様々な異なった方法で証明するということがなされていた．したがって，証明は体系を構築するというよりも，種々の図形間のつながりを構築する機能をもつのである．すなわち，「体系化」というよりも，「組織化」という機能をもっているといえる．

この他，コミュニケーションや説明の機能においても，機能の仕方が異なったが，ここでは割愛する．

(4) 証明の生態を形作る条件と制約

証明の形態や機能の仕方などその生態が，なぜ国によってこのように異なるのか，その要因を明らかにすることが，本研究における大きな課題である．証明の生態を形作る条件と制約の分析では，人間学理論における「決定レベル」という視点を用いた．決定レベルとは，条件と制約を分類するカテゴリーである．具体的には，「社会－学校－教育－教科（数学）－領域（幾何）－単元－テーマ－問い」といったもので，数学外の社会的な要素から，数学内の指導内容の細かな要素までを分類できる．学習指導要領やその解説をはじめとする国定カリキュラムの分析では，このカテゴリーを逆に視点として用い，あるレベルにはどういう要素が証明の生態に影響を与えているのかといったことを検討した．

その結果，フランスの国定カリキュラムから特定できたものは，主に教科（数学）レベル，領域（幾何）レベルの要素であった．例えば，数学レベルでは，「数学的思考」，「数学的事実の真理」，「真の数学的活動」が，幾何レベルでは，「幾何のあり方」，「知識の再構成」，「作図の扱い」が証明の扱いに大きな影響を与えていると考えられた．具体的にいくつか説明しよう．

例えば，「真の数学的活動」とは，フランスの国定カリキュラムにおいて，数学が一般教養の科目として子どもたちに伝える必要のある数学の“真”の姿を示したものとされている．それは，わが国の「数学的活動」のように，子どもたちの数学学習が進むために考えられた指導の方策ではなく，一般の数学者らが行なっている数学に関する活動がいかなるものか知ることを目的としたものである．この活動には，問題を見つけるところから，成果を発表し，最終的に研究をまとめるところまでの一連の営みがあり，その中に証明が含まれているのである．すなわち，フランスの前期中等学校数学においては，こうした「真の数学的活動」を知ることが目標となっている限り，証明を扱う必要があり，学校数学に生息するのである．

「真の数学的活動」は，証明の存在に影響を与えるものだが，「幾何のあり方」は証明の生態，特に機能の仕方に影響を与えるものである．「幾何のあり方」とは，指導内容である幾何をどのような性格をもつものと捉えているかを意味する．フランスでは，観察幾何から演繹幾何へ移行することが，幾何領域の目標の一つとなっている．これは，視覚などの知覚による事柄の認識から，図形性質を用いた事柄の認識への移行を促すものである．そしてこの移行に証明が必要となるのである．このことは，帰結として，先に示した視覚に頼らないで事柄が正しいことを示すという証明の機能に直結する．さらに，これも先に触れたが，フランスの幾何領域において，体系は指導内容ではなかった．このことは，フランスの証明の体系化の機能ではなく，組織化の機能を生じさせている．

以上が，証明の生態を形作る条件と制約に関するおおよその研究成果である．なお，今回は数学に関する条件と制約が主な成果であったが，それは分析対象が国定カリキュラムのみであったからであろう．それ以外のさらに上のレベルの条件と制約（数学に特化しないもの）については，国定カリキュラムを作成する委員会の議事録など他の資料が必要となる．

(5) 研究成果の発表

本研究の成果は，これまで国内外の研究大会，学会誌で発表してきた．しかしながら，発表した内容はまだ成果の一部にとどまっており，さらに海外への発信は十分とはいえない．研究期間は終了したが，現在も成果発表の準備をしており，今後とも発表していく予定である．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　５件）

① 宮川健 (2013). 「幾何領域における証明の存在理由 ～フランスと日本の場合～」. 日本数学教育学会誌 数学教育学論究臨時増刊, Vol. 95, 345-352. 査読有.

② 宮川健 (2012). フランス前期中等学校平面幾何領域における証明の生態～教

科書分析から～．　日本数学教育学会誌『数学教育』, Vol.94, No.9, 2-11. **査読有.**

③ Miyakawa, T. (2012). Proof in geometry: a comparative analysis of French and Japanese textbooks. In Tai-Yih Tso (Ed.), Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol.3, pp. 225-232), Taipei, Taiwan: PME. **査読有.**

④ 宮川健 (2011). **フランス前期中等学校数学における証明の生態**(2)**～国定カリキュラムの分析から～．『第** 44 **回数学教育論文発表会論文集（第** 2 **巻）』, 上越教育大学,** pp. 801-806. **査読有.**

⑤ 宮川健 (2011). **フランスの高等学校数学教科書．　日本数学教育学会誌『数学教育』**, Vol.93, No.7, 43-47. **査読無.**

〔学会発表〕（計　１件）

① Miyakawa, T. (2012). Comparative study on proof in geometry: an analysis of textbooks of France, USA, and Japan. *ICME-12 Pre-proceedings*, p. 7497, 8-15 July, COEX, Seoul, Korea.

６．研究組織

(1)**研究代表者**

宮川　健（MIYAKAWA, Takeshi）
上越教育大学・大学院学校教育研究科・准教授
研究者番号：30375456