

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 4 日現在

機関番号：15401

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23730829

研究課題名(和文) 数学教育における高次の幾何的思考の育成を意図した授業構成と単元設計に関する研究

研究課題名(英文) A study on designing lessons and teaching units for developing advanced geometrical thinking in mathematics education

研究代表者

影山 和也 (Kageyama, Kazuya)

広島大学・教育学研究科(研究院)・准教授

研究者番号：60432283

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円、(間接経費) 630,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の目的は、高次の幾何的思考の育成を目指した、中学校および高校数学における幾何教育の改善と開発をすることである。そのために、幾何的思考の理論的検討と合わせて、生徒の幾何的思考を実証的に明らかにする。最終的に、思考が連続的に発展するような授業の構成及び単元の設計を提案する。数学の形式化や定義の設定による幾何的概念の過程を、その再帰性および身体的認知理論からの知見に基づいて記述した。特に、実際の幾何的思考は、認知と概念との複雑な相互作用からなるものである。本研究では、この両面を併せ持つ記述枠組みを提示しつつ、数学的規則の存在によってこの相互作用が数学的に促されうることを示した。

研究成果の概要(英文)：The aim of this study is to improve and develop teaching geometry in secondary school for developing advanced geometrical thinking. For this aim this study clarifies students' geometrical thinking through both theoretical and empirical considerations. This study described a process of geometrical thinking from the viewpoint of formalization of mathematics and setting definitions based on findings of its recursive nature and embodiment theory. Especially actual geometrical thinking is consisted of complex interactions between cognition and conception. This study presented the descriptive framework having this both aspects and argued that mathematical rules let this interactions enhance mathematically.

研究分野：教科教育

科研費の分科・細目：教育学・教科教育学

キーワード：高次の幾何的思考 身体的認知

1. 研究開始当初の背景

(1)中等教育における数学教育，すなわち中学校および高等学校を対象とする数学教育において，図形の教授と学習の持つ教育的価値は，例えば「証明」の学習を通して論理的思考力を養うというように，さまざまに挙げられてきた。しかしながら，論理的思考力以外の図形に関わる数学的思考そのものの発達にはあまり注意が向けられていない。さらに，義務教育か否かという壁もあってか，学習内容の構成にあたっての中学校と高等学校との連携も必ずしも定かではない。

(2)国際的には，数学的思考の長期的発達に関わる研究は盛んである。そのうちのひとつが，高次の数学的思考論（advanced mathematical thinking）である。これは，図形に特別な数学的思考の発達を含む，包括的な研究領域である。その成果は，数学の三世界（概念具体的，プロセプト記号的，公理形式的）の変容として，長期的発達を特徴づけられている。

(3)また，数学的思考に関わる認知科学的研究も盛んである。例えば，身体的認知理論は，概念メタファーを説明道具として，数学的思考の考えられ得る様相を提案している。もし，図形に関わる高次の数学的思考（以降，高次の幾何的思考と呼ぶ）さえ，具体的な抽象的な身体的行為と関わるならば，それは従来の数学的思考研究を認知ベースで展開させることを可能にする。

2. 研究の目的

本研究の全体的な目的は，高次の幾何的思考の育成を目指した，中学校および高校数学における幾何教育の改善と開発することである。そのために，数学的活動の視座からの幾何的思考の理論的検討と合わせて，中学2年「証明」の学習前後から期待される生徒の幾何的思考を実証的に解明する。最終的に，思考が連続的に発展するような授業の構成及び単元的设计を目指す。

3. 研究の方法

高次の幾何的思考の明確化にあたっては，関連する先行研究や文献の整理，解釈，考察を中心として進めていく。あわせて，数学科教師との協同によって実験授業を行い，それによって得られるデータを質的に分析することによって，生徒による幾何的思考を実証的に記述していく。中等教育における幾何教育への提言は，こうした一連の取り組みのなかで随時行っていく。

4. 研究成果

研究のキーワードである「高次の幾何的思考」とは，図などの視覚的特徴に惑わされることなく推論をすることや，定義を適切に設定することによって数学的体系を作り出し

たりすることを含んでいる。数学の学習においては，生徒は「既存の」文化としての数学に出会うということだけではなく（文化歴史的視座），教室での個々の活動および集団的活動によって創造的に作り出していくという（構成主義的，相互作用主義的視座），両側面があると期待される。それはたとえば，生徒自らが素朴に抱いている概念を，数学的定義によって明確にしていく活動のなかに現れる。「正多面体の定義」に関わる中学1年の数学科授業の観察を通して同定された，一連の定義する活動は次のような段階によって記述される。

1. 対象の分類，典型事例と非典型事例とによる素朴なカテゴリーの形成
2. 視点による概念形成，特にモノとの相互作用を通じた身体経験による「らしさ」の獲得
3. 境界の明確なカテゴリーの形成を目指した，観点による特徴・性質のリスト化
4. 定義の規準を踏まえた言語化

1.および2.では，前言語的な素朴な概念の形成が具体物との感覚的な相互作用を通してなされ，3.および4.で，言語によって考察対象としての概念を明確にしていく。この一連の活動では，数学的对象の規定を共通の数学的言語によって行うことが示されているが，高次の幾何的思考では，事実や事柄の記述も同時になされるだろう。その際，身体的認知理論によれば，活動段階前半の身体経験こそが認知的基礎をなしていると仮定される。

加えて，長期的な数学的思考の発達においては，いろいろな数学学習のさまざまな局面で形式化を行っていることが，「数学とは何か」に関わる哲学的認識論的知見をもとにして，理論的に示唆された。すなわちそれは，活動の統合と濃縮とが次のような流れにおいて繰り返したり，再帰的に行われたりすることである。

- (a) 数学外での活動の抽象
- (b) 活動とアイデアの抽象
- (c) 記号と規則を用いた形式化
- (d) 数学内での活動の抽象
- (e) 活動とアイデアの抽象
- (f) 記号と規則を用いた形式化
- (g) ... [以下，継続的再帰的に繰り返される]

研究の当初から，高次の幾何的思考のためには，対象の動きを点の対応の仕方によって捉えることや，操作の過程および結果を数学的に記述することが大きく関わっていることが予想された。それはたとえば，平面上に合同な図形を敷き詰める方法を考える際に，ひとつの単位図形を連続的に移動させていくことを提案する生徒は，実際に図形を物理的に動かすイメージから，点と点の対応の仕

方のみに注目するようになっていく。示唆的なことは、具体的動きの実現と捨象とに身体的行為が関わること、そして知覚主体から概念主体への思考様式の変容があることである。

こうした見通しをさらに進めるため、本研究の基盤にしたのが、(先述した)近年の数学教育研究における身体的認知理論の展開とマルチモダリティーの思想である。

身体的認知理論とは、身体的行為の抽象化されたパターンによって認知行為がなされることを主張し、数学的概念でさえ、こうした抽象的パターンや概念メタファーに基づいて身体化されているとされる。マルチモダリティーとは、もともとと言語学の領域の概念であり、人は概念形成や思考判断において、さまざまな表現上のリソース(身振り手振り、図の読みや書き、言語的表現など)を複合的に使用していることを述べるものである。数学科授業におけるさまざまなリソースは、何らかの使用目的や解釈の意図が込められているという意味で、いずれも文化的側面を持つ。それゆえ、これらのリソースは、幾何的概念のある種の具体化と見なされうる。そのリソースとの感覚を通じた相互作用こそが、幾何的思考の核心と考えられた。

上記、1.~4.の活動段階の記述においても現れている「視点」と「観点」は、幾何的思考において欠かすことのできない見方である。特にこれらが数学科授業のなかで個々の生徒に顕著になるのが、認知と概念とが葛藤する状況においてである。下の図1は、立方体の具体化である見取図(左;ある規則に従った、概念の具体化)と、物理的具體物の写真である(右;ある位置から見た、概念の見え方)。

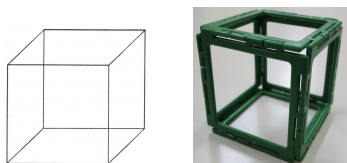


図1 立方体の具体化

認知と概念の葛藤とは、概念的に定まる直線や平面の位置関係が、物理的具體物を視覚によって捉えようとするとき、奥行き知覚の影響によってそのような見えにくいことに起因する。そこで、次のような四つ組みを取り入れることによって、幾何的思考と概念形成との認知と概念の動きを記述することを目指した。

- 認知的対[視点-現れ]: リアルタイムの知覚を支える認知的枠組み
- 概念的対[視座-相貌]: 身体経験の言語化され得ない概念カテゴリーに類似した「らしさ」を支える概念枠組み

前者は、ある特別な視点によって対象を知覚し、その知覚による生成として現れを形成

するという認知的事実を表している。それゆえ、対象の現れは、視点の変化に対応して変わることになるし、上述のような知覚的效果からも影響を受ける。対照的に、後者は、対象の本質を特別な視座によって意識的に抽象し、形式的に定義することを通して、概念の相貌を獲得することを表している。相貌とは感覚的で初源的な概念化であって、対象となる概念の分類したり、順序づけたり、利用したりする。

この組み合わせによって、認知面と概念面とをあわせもつ複雑な幾何的思考の様相を記述する枠組みとして提示した。これにより、授業観察によって得られるデータを、言葉による発言や図表現だけではなく、具体物の操作や身振り手振りまで含めて包括的に捉えることを可能にする。そこからの理論的な帰結は、幾何的思考とは、認知と文化の相互進展という面があるという点である。中学1年「投影的な見方」をテーマとする実験授業において、正四面体の概念形成にかかる生徒の活動は、次のような図で表された。

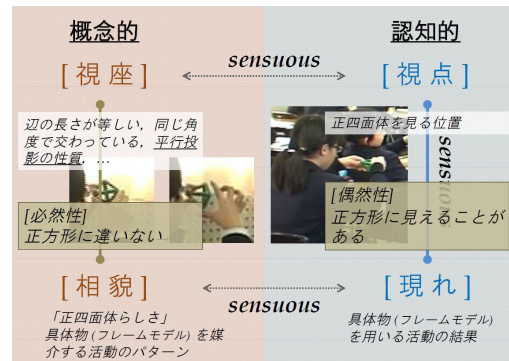


図2 正四面体概念の様相

また、「投影的な見方」に関わる実験授業を、上記枠組みを用いての質的分析によって、次のような知見が得られた。

- 身振り手振りには、幾何的思考を具体から抽象へ転換させたり、推論を進めたりする機能がある。
- それだけではなく、幾何的思考を具体から抽象へ転換させたり、推論を進めたりする機能がある。

そして、身体的認知理論の「弱点」として再三指摘される数学性との関連について、生徒個々のさまざまな活動自体が思考の連続的発展のための要件であって、特に高次の幾何的思考を可能にする場としての「主題領域」とその変容の概念を提起した。この領域の変容の要因として同定されたものは、数学科授業における「規則の導入」である。比較的に自由になされうる認知行為も、この規則によって制限が加えられ、必然的に数学的活動へとつながっていくことになる。たとえば、上記の中学1年「投影的な見方」において、投影図の作図方法が教師によって導入された後、生徒は目の前の具体物に触れようとす

なくなったことは象徴的であった。数学の発展における「主題領域」の詳細な考察は今後の継続すべき課題であるが、明示的な規則の導入によって、生徒による思考の変容は上記の認知的および概念的の四つ組みによって表される可能性がある。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計7件)

影山和也. (2013). 「図形的概念形成への新たな認知論的接近」. 日本数学教育学会『数学教育学論究 臨時増刊』, 第95巻, pp.97-104. [査読有]

Kazuya Kageyama. Sensuous experience and mathematical conceptions. Heinze, A. (Ed.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, **3**, 121-128. Kiel, Germany: PME. 2013. [査読有]

Mitsunori Imaoka, Kazuya Kageyama and Hideaki Kida. Improving teaching practices through group activities with problem posing. Inprasitha, M. (Ed.), *Proceedings of the 6th East Asia Regional Conference on Mathematics Education*, **3**, 192-201. Phuket, Thailand: ICMI. 2013. [査読有]

Kazuya Kageyama. Student's initial concepts of geometric transformations and underlying cognitive abilities. Tai-Yih Tso. (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, **3**, 3-10. Taipei, Taiwan: PME. 2012. [査読有]

岡崎正和・岩崎秀樹・影山和也・和田信哉. 「図形の動的な見方の構造について: 比喩的認識の視点から」. 日本数学会, 『日本数学会誌』, 第35巻, 第2号, 53-62. 2012. [査読有]

Kazuya Kageyama. Geometrical thinking identified in 'static geometry environments'. Sung Je Cho. (Ed.), *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, 2232-2241. Soul, Korea: ICMI. 2012. [査読有]

Kazuya Kageyama. Development of student's ability to construct

unit(s) for tessellating a plane with figures. Ubuz, B. (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, **1**, 329. Ankara, Turkey: PME. 2011. [査読有]

[学会発表](計3件)

影山和也. Sensuous cognition 論からみた図形的概念形成, 全国数学教育学会第38回研究発表会, 2013(於: 香川大学).

影山和也. 「数学教育における高次の幾何的思考に関する基礎的研究 - 定義をする活動の位置 - 」. 日本数学教育学会, 『第45回数学教育論文発表会論文集』, 611-616. 2012(於: 奈良教育大学).

影山和也. 「数学教育における高次の幾何的思考に関する基礎的研究 - 数学の形式性に着目して - 」, 日本数学教育学会, 『第44回数学教育論文発表会論文集』, 471-476. 2011(於: 上越教育大学).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

影山 和也 (KAGEYAMA, Kazuya)
広島大学・大学院教育学研究科・准教授
研究者番号: 60432283

(2) 研究分担者

()

研究者番号:

(3) 連携研究者

()

研究者番号: