

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 11 日現在

機関番号：32612

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23740011

研究課題名(和文)種々の保型形式とその数論への応用

研究課題名(英文)Various modular forms and these applications for Number Theory

研究代表者

高井 勇輝 (TAKAI, Yuuki)

慶應義塾大学・理工学部・特任助教

研究者番号：90599698

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円、(間接経費) 810,000円

研究成果の概要(和文)：保型形式と Galois 群の性質を組み合わせることで、類数問題などの整数論への応用を研究した。特に、有理数体上で得られていた結果をより一般の体上の結果に拡張することを主たる目標とした。そのための道具である多変数の保型形式、特に、Hilbert 保型形式の性質を調べ、総実数体上の CM 二次拡大に対する類数問題などに応用した。

研究成果の概要(英文)：Combining properties of modular forms and Galois groups, I studied some applications for number theory. In particular, the main purpose is to extend some arithmetic results on the rational field to them on more general fields. To do this, I studied property of Hilbert modular forms as a tool and applied to the class number problem for CM quadratic extension.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：保型形式 Galois 群 Hilbert 保型形式 相対類数 保型 L-関数 Sturm の定理 L-関数の特殊値 Abel 多様体

1. 研究開始当初の背景

保型形式と Galois 群の間には Langlands philosophy に代表されるように不思議な関係がある。保型形式は最初のいくつかの Fourier 係数で決定されるという強い有限性を持ち、逆に Galois 群は Chebotarev 密度定理のような無限性を持っている。これらを組み合わせることで、いくつかの結果が得られていた。

例として、Langlands 哲学の例である Serre の保型性予想を使うことで、二次元 mod p Galois 表現がいくつかの素数での Frobenius 元に対する特性多項式の一致で同型かを判定できるかが研究代表者により得られていた。また、Ono-Skinner や Kohnen-Ono により、重さ半整数の保型形式や Galois 群の性質を駆使して二次体の類数問題や、有理数体上の楕円曲線の性質などへの応用が得られていた。

しかし、当時これらの結果は有理数体上(もしくは二次体上)の結果しか得られていなかった。

2. 研究の目的

研究開始当時の背景で述べたように、結果が有理数体上の結果に限られていた要因は、一変数の保型形式だけしか使っていなかったことに起因していた。

本研究の主たる目的は、これらの応用を多変数の保型形式に対して拡張することで、より一般の体上の結果を得ることであった。

本研究の具体的な目的は主に次の4点だった。

- (1) より一般の群に対する保型形式がいくつかの q -展開係数で決定されるかを解明する。
- (2) 半整数ウエイトの Hilbert 保型形式を使うことで、相対類数の非可除性を示す。
- (3) 半整数ウエイトの Hilbert 保型形式を使うことで、Hilbert 保型 L -関数の中心値の mod p での非零性を示す。
- (4) 総実数体上のアーベル多様体の同種性の判定法を得る。

(1) はより一般の保型形式を数論に応用する際に必要とされる道具の開発である。

(2) での相対類数の非可除性とは、素数 p と総実数体を与えたときに p で割れない相対類数を持つ総虚二次拡大(CM 二次拡大)の個数の判別式での評価を得る事を指す。この手の問題は、跡公式を使う方法により無限に存在すること、概均質ベクトル空間を使う方法により素数が 3 のときには評価が得られていた。素数が 5 以上で総実数体が有理数体のときに Kohnen-Ono により、テータ関数の 3 乗を使うことで評価が得られた。

(2) では、(1) で得られた結果と、Kohnen-Ono の結果の Hilbert 保型 Eisenstein 級数への拡張を使う方法をとる予定だった。

また、Kohnen-Ono の方法は、半整数ウエイトの newform を使うことで、保型 L -関数の中心値の mod p での挙動も調べることを可能にした。(3) では同様に半整数ウエイトの Hilbert 保型 newform と、(1) での結果を使うことで、Hilbert 保型 L -関数の中心値の mod p での挙動を調べる予定であった。また、(4) においては(1)で得られた結果と、保型性に関する定理、Faltings の同種性定理を使うことで判定法を得ようと考えた。

3. 研究の方法

本研究は大掛かりな実験器具などは必要としない理論的な研究であるので、個人のレベルで問題に取り組み、また近い研究者と討論することで研究を進めた。

また、国内外の研究集会や学会に積極的に出席し、関連分野の研究者と討論を重ねることで、問題や周辺の知識に関する理解を深めた。

(2) に関する研究結果がまとまった段階で国内外の研究集会や学会などでの発表を多数行った。

最終年度の9月に2週間、Ken Ono 教授 (Emory 大学)に訪問し、得られて結果について紹介すると共に、より深遠な問題に関する共同研究を開始することができた。その共同研究については現在も進行中である。

研究目的の解決には必要な知識をより正確な形で理解しなくてはならない。そのために購入した関連する内容の図書などは研究を進めるにあたり、大いに有効であった。

4. 研究成果

(1) 保型形式は最初のいくつかの Fourier 係数で決まっていることは、昔から知られていた。この事実の mod p 類似は、Sturm により示され、多くの数論などへの応用を生んだ。この Sturm の定理の Hilbert 保型形式に対する拡張は、研究代表者により、本研究課題の開始時には得られていた。本研究課題の期間中に、詳細を論文にまとめ、雑誌に投稿し出版した。

(2) Kohnen-Ono の結果を Hilbert 保型 Eisenstein 級数を使って拡張する際、当初は(1)で得られた結果を適用する予定であった。しかし、(1)で得られた bound が予想していたよりも大きく、具体的に適用する際に使えないことがわかった。そこで、これを回避する策として、対角制限により一変数の保型形式に落として、一変数保型形式に対する Sturm の定理を適用することを考え、成功した。対角制限を使う方法では技術的理由から、総実体が有理数体上 Galois である仮定を必要とする反面、(1)では得られなかったレベルを割る素数での挙動も確認でき、より強い結果を得ることに成功した。特に、相対岩澤不変量の消滅に関する結果も得られたことは大きな

成果と言える。これらの結果については、論文としてまとめ、雑誌に投稿し、現在査読中である。また学士院紀要に本内容のアナウンスが出版された。

(3) 上述の (2) で開発した証明のテクニックは半整数ウエイトの Hilbert 保型 newform に対象を変えても機能する。この場合は、Hilbert 保型形式に対する志村対応と、Baruch-Mao による Waldspurger 型の定理の effective version を使う。

これまでに、総実数体が有理数体上 Galois で次数が奇数、レベルが squarefree で、newform が CM form に対応している場合は成功している。CM form でない場合にも同様に示せると考えているが、他の仮定を外すことは難しい。また、この結果の系として、Hilbert モジュラーなアーベル多様体の Tate-Shafarevich 群の位数の非可除性まで示せると考えている。その為には、Hilbert モジュラーなアーベル多様体に対する Manin 定数を定義し、Mazur や Edixhoven の結果の類似を示す必要がある。その証明には志村曲線の CM 点や bad reduction を調べる必要があり、簡単ではない。現在も研究中である。

(4) (1) での結果を使うことで、アーベル多様体が Hilbert モジュラーであるという仮定の下では証明が出来ている。しかし、結果のインパクトなどを考えると、保型性の仮定を外したくなる。これについて、最近著しく発展してきている potential modularity を使うことで、保型性の仮定を落とせると考え、再度検討している。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

1. Yuuki Takai, On indivisibility of relative class numbers of totally imaginary quadratic extensions and these relative Iwasawa invariants. Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences 90.2 (2014): 33-36, 査読あり。
2. Yuuki Takai, An analogue of Sturm's theorem for Hilbert modular forms, Algebra and Number Theory, 7:4 (2013), 1001-1018, 査読あり。

[学会発表](計 17 件)

1. 高井 勇輝, 「総虚二次拡大の相対類数の非可除性とそれらの相対岩澤不変量の消滅」, 九州代数的整数論 2014, 九州大学, 2014 年 2 月 7 日
2. Yuuki Takai, 「Indivisibility of relative class numbers of CM quadratic extensions and vanishing of relative Iwasawa invariants」, Number Theory

Seminar, Stanford University, 2013 年 11 月 8 日

3. Yuuki Takai, 「Indivisibility of relative class numbers of CM quadratic extensions and vanishing of relative Iwasawa invariants」, Number Theory Seminar, UC Berkeley, 2013 年 10 月 9 日
4. Yuuki Takai, 「A determining condition of Hilbert modular forms」, Algebra Seminar, Emory University(アトランタ), 2013 年 9 月 3 日
5. Yuuki Takai, 「A determining condition of Hilbert modular forms」, KIAS Number Theory Seminar, KIAS(ソウル), 2013 年 8 月 8 日
6. Yuuki Takai, 「Indivisibility of relative class numbers of CM quadratic extensions and vanishing of these relative Iwasawa invariants」, Seminar in Seoul National University, ソウル大学, 2013 年 8 月 5 日
7. 高井 勇輝, 「総虚二次拡大の相対類数の非可除性とそれらの相対岩澤不変量の消滅」, 香川セミナー, 香川大学, 2013 年 6 月 22 日
8. 高井 勇輝, 「総虚二次拡大の相対類数の非可除性とそれらの相対岩澤不変量の消滅について」, 岩澤理論セミナー, 慶應義塾大学, 2013 年 5 月 27 日
9. 高井 勇輝, 「総実数体の総虚二次拡大体の相対類数の非可除性について」, 日本数学会 2013 年度年会, 京都大学, 2013 年 3 月 23 日
10. Yuuki Takai, 「Indivisibility of relative class numbers of CM quadratic extensions of totally real Galois number fields」, Korea-Japan Joint Seminar on Number Theory and Related Topics, Ewha womans university, Korea, 2013 年 1 月 24 日
11. 高井 勇輝, 「CM 体の相対類数の非可除性について」, 早稲田整数論セミナー, 早稲田大学, 2012 年 11 月 23 日
12. 高井 勇輝, 「CM 体の相対類数の非可除性について」, 北陸数論セミナー, 金沢大学サテライトプラザ, 2012 年 7 月 19 日
13. Yuuki Takai, 「On Sturm's theorem for modular forms」, The 3rd Keio-Yonsei Workshop, 慶應義塾大学, 2012 年 5 月 24 日
14. Yuuki Takai, 「An analogue of Sturm's theorem for Hilbert modular forms」, Japan-Korea Number Theory Seminar, 名古屋大学, 2011 年 11 月 10 日
15. 高井 勇輝, 「An analogue of Sturm's theorem for Hilbert modular forms」, 第 10 回広島仙台整数論研究集会, 広島大学, 2011 年 7 月 20 日

16. 高井 勇輝, 「An analogue of Sturm's theorem for Hilbert modular forms.」, 代数セミナー, 慶應義塾大学, 2011 年 6 月 30 日
17. 高井 勇輝, 「Sturm の定理の Hilbert 保型形式に対する類似.」, 代数学コロキウム, 東京大学, 2011 年 4 月 27 日

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.keio.ac.jp/~takai/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

高井 勇輝 (TAKAI Yuuki)

慶應義塾大学・理工学部・数理科学科

特任助教

研究者番号: 90599698