様式Ｆ－１９

科学研究費助成事業（学術研究助成基金助成金）研究成果報告書

平成　２５年　６月　１７日現在

機関番号：５２２０１
研究種目：若手研究（B）
研究期間：H23～H24
課題番号：23740012
研究課題名（和文）導来圏と安定性条件の研究

研究課題名（英文）STUDY ON DERIVED CATEGORIES AND STABILITY CONDITIONS

研究代表者
岡田　崇（OKADA SO）
小山工業高等専門学校・一般科・講師
研究者番号：50547015

研究成果の概要（和文）：

導来圏と安定性条件の研究をホモロジカルミラー対称性や壁越え現象を使い行った。特に、同変導来圏を用いたホモロジカルミラー対称性を研究し、Picard-Fuchs 方程式の解の中心電荷[Hosono 04][Kontsevich 12]を用いて、Bridgeland 型の安定性条件をミラー対称性で非常に重要な Fermat 型の 3 次元 Calabi-Yau 多様体に対し構築した。解の変形が壁越え現象を与える。また、m-Kronecker 箙の安定表現のモジュライ空間のオイラー数の漸近値に対する簡明な公式を与えた。

研究成果の概要（英文）：

We worked on derived categories and stability conditions, using homological mirror symmetries and wall-crossings. We studied the homological mirror symmetry of equivariant derived categories and with central charges of solutions of Picard-Fuchs equations [Hosono 04][Kontsevich 12], we constructed stability conditions of Bridgeland type for the Fermat Calabi-Yau threefold. We obtained wall-crossings by such solutions. Also, we obtained a clear asymptotic formula for Euler characteristics of moduli spaces of stable representations of m-Kronecker quivers.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
交付決定額	2,700,000	810,000	3,510,000

研究分野：導来圏と安定性条件
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：ホモロジカルミラー対称性、導来圏、安定性条件、周期

１．研究開始当初の背景

導来圏は代数幾何学、表現論、シンプレクティック幾何学などの数学の各分野に限らず、理論物理の超弦理論などでも活発に研究されている。

導来圏は代数幾何学における連接層、表現論における箙の表現、シンプレクティック幾何学における深谷圏などから作られる。

超弦理論では、導来圏は超弦と超弦の端点が動く「膜」の様子を表す数学的な枠組みとして提唱されている。これは、Kontsevich によるホモロジカルミラー対称性予想[International Congress of Mathematics (ICM) 94]に基づく。

安定性条件は、Mumford の安定性を基礎として、Bridgeland により提唱された導来圏を調べるための比較的新しい概念である[ICM 06]。

安定性条件の概念は、理論物理学者の Douglas による超弦理論の研究におけるΠ安定性条件と呼ばれる概念[ICM 02]の数学的定式化である。

導来圏の安定性条件に対する、「安定な対象」とは超弦理論における「安定な膜」を意味する。また、Douglas の研究は、以下で述べる Picard-Fuchs 方程式の解（周期）の研究に基づく。

２．研究の目的

導来圏および安定性条件に、ホモロジカルミラー対称性を研究して、より深い理解をもたらすのが本研究の目的である。

導来圏としては、超弦理論また数学でも非常に重要な 3 次元 Calabi-Yau 空間に対する導来圏の研究を行う。

特に、3 次元 Calabi-Yau 空間の内 Fermat quintic と呼ばれる 5 次射影超曲面で、

$$0=x_1^5+x_2^5+x_3^5+x_4^5+x_5^5$$

で定義される多様体 X を扱う。

この多様体 X は、ホモロジカルミラー対称性予想の元となるミラー対称性[Candelas--de-la-Ossa--Green--Parkes 91]の研究で最も重要な多様体である。

さらに、壁越え現象が存在する基本的な安定性条件を考え、安定な対象がどの位あるかを研究する。これは、安定性条件の理論で重要な問いであり、超弦理論のブラックホールの理論に関係している。

３．研究の方法

上記で定義した X の連接層の導来圏 D(X)に対して、群 $G=Z_5^4$ の x_i 達への 1 の五乗根によるかけ算の作用を考えて、D(X)の同変導来圏 $D_G(X)$を考える。

さらに、X のミラー対と呼ばれる多様体に対する周期を $D_G(X)$の安定性条件で研究する。

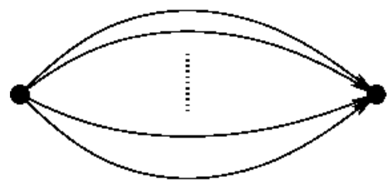
より具体的には、安定性条件の中心電荷として周期から決まる写像を用いる[Hosono 04][Kontsevich 12]。

この「周期による中心電荷」と良いコンパクト生成元を用いて、$D_G(X)$の安定性条件を実現する。周期による中心電荷は、ガンマ類と呼ばれる超幾何級数と X のコホモロジー類から求められる。

ここで「良いコンパクト生成元」とは以下の性質を持つ。まず、ホモロジカルミラー対称性の観点から、ラグランジアンとなっている。さらに、Orlov の導来同値[Orlov 09]から自然に従う 5 乗すると二階のシフトになる D(X)の自己同値と整合性がついている。

また、上のコンパクト生成元は導来圏のテンソル積を用いて Dynkin A 型の箙の表現からも求まる。

「安定な対象がどの位あるのか」という問いには、箙の表現の導来圏を用いて調べる。箙としては、m-Kronecker 箙と呼ばれる、二つの頂点、m 本の平行な有向矢印を持つ箙を使う。図では以下となる。



この m-Kronecker 箙は、壁超え現象が存在する最も基本的な例を与えている。また、上記の多様体 X のホモロジカルミラー対称性にも関係している。

「安定な対象がどの位あるのか」という研究のために、安定な対象のモジュライ空間のオイラー標数を評価する。また、理論物理学者による超弦理論におけるブラックホールの研究から導かれた、MPS 退化公式[Manschot-Pioline-Sen 12]を用いる。

上記の MPS 退化公式は m-Kronecker 箙の安定表現のオイラー標数を、各頂点に一次元だけの線形空間が存在する安定表現のオイラー標数の重み付き和に分解し理解する。

４．研究成果

同変導来圏と箙の表現を用いたホモロジカルミラー対称性により、周期による中心電荷を用いて、多様体 X に対し安定性条件を構

築した[Okada 13]。

また、[Okada 13]での安定性条件は、従来の Bridgeland による安定性条件に対して、Bridgeland 型の安定性条件という従来の概念を拡張した概念を用いる（後者の概念も簡単のため、単に安定性条件と呼ぶ)。

より詳しく述べると、深谷-Seidel 圏（深谷圏の一種）を用いたホモロジカルミラー対称性によって $D_G(X)$のラグランジアンがまずいくつか得られる。これらのラグランジアンからなるコンパクト生成元を用いて、周期による中心電荷による安定性条件を構築した。

上記のラグランジアンからなるコンパクト生成元は、導来圏の非常に基本的な対象である Beilinson 基底から出来ている。また、このコンパクト生成元は箙の表現をもたらす。

さらには、安定な対象として、ラングランジアンのみからなる安定性条件を与えている。これは、[Thomas-Yau 02]で深谷型の導来圏の安定性条件に期待されている性質である。

Picard-Fuchs 方程式には、大複素構造極限と Gepner 点と呼ばれる確定特異点がある。Gepner 点回りの周期のモノドロミーは、上で述べた Orlov の導来同値[Orlov 09]から自然に定まる D(X)の自己同値に対応している。定理の主張（の概略）は以下である。

定理「導来圏 $D_G(X)$に対して、Picard-Fuchs 方程式の解からなる中心電荷を持つ安定性条件が、大複素構造極限およびに Gepner 点の近くで存在する。特に、これらの安定性条件の安定な対象はラグランジアンであり、かつ Beilinson 基底の同変対象をシフトしたものである。」

上記の定理から、ミラー対称性[Candelas--de-la-Ossa--Green--Parkes 91][Bershadsky-Cecotti-Ooguri-Vafa 94]で非常に重要な役割を果たしたミラー写像や周期の商が安定性条件の言葉で非自明な意味を持つ。

具体的には、周期の変形が導来圏の壁超え現象[Kontsevich-Soibelman 08]をもたらす。また、ミラー写像は安定性条件の言葉で圏論的に書き下せる。

そもそものミラー対称性の意味は、X のミラー対の周期を X の代数幾何的性質に結びつけることでであった。

実際、ミラー対称性で一番よく知られている当初提唱された等式は周期の商をミラー写像で書き下し、X の有理曲線の数を与えると期待されていた。

しかしながら、Clemens 予想が正しいとすると、その提唱された等式は成り立たないと判明している。一方で、その提唱された等式は、現在では GW 不変量(有理曲線の仮想数)で正当化されている[Givental 96][Lian-Liu-Yau 97]。

安定性条件の存在は不等式の組み合わせ（開条件）で成り立っている。実際に上記の定理は、安定性条件の概念を用いると、周期のモノドロミーを用いた漸近計算から自然に従う。これは、いままでのミラー対称性の物理的な考察から導かれる等式の両辺の計算による証明とは異なる。なお、壁越え現象は閉条件による。

定理の類似を、Dynkin A_1 箙（頂点が二つで矢印が一本の箙）や有理曲線の余接空間の安定性条件に対して示した。これには、Gelfand-Kapranov-Zelevinsky (GKZ)系の解を用いる。この GKZ 系と斉藤恭司氏による原始形式の密接な関係は[Hosono 04]で指摘されている。

「安定な対象がどの位あるか」という問いで調べた m-Kronecker 箙は、上記の A_1 箙を一般化している。

ここで、m-Kronecker 箙の安定表現で、次元ベクトルと呼ばれる各頂点での線形空間の次元の対が素であると仮定する。この場合、よく知られた King の結果から、安定表現のモジュラ空間は非特異になる。

MPS 退化公式と[Okada 12]中で示された主張を使うと、m-Kronecker 箙の安定表現のモジュライのオイラー標数の漸近値がわかる。定理は以下の通りである。

定理「m-Kronecker 箙の次元ベクトルが（a,b）である安定表現のモジュライ空間 K(m,a,b)のオイラー数 $\chi(K(m,a,b))$は以下を満たす。つまり、m>>0 に対して、
$$\log(\chi(K(m,a,b))) \sim (a+b-1)\log(m)$$
が成り立つ。」

オイラー標数 $\chi(K(m,a,b))$は Reineke[Reineke 03]により、公式が知られているが、上記のような簡明な表現は知られていなかった。

また、K(m,a,b)はDouglasにより、「重力—ゲージ対応」から超弦理論におけるブラックホールの理論と関係していると指摘されている。

以上の研究を進めるために、京都大学にS. Galkin 氏(Kavli IPMU)、 M. Van den Bergh 氏 (Hasselt)、 R. Anno 氏(U. Pittsburgh)、Z. Hua 氏(Kansas State U. & Chinese University of HK)、J. Huizenga 氏(UI Chicago)、椎名貴久氏(工学院大学)、T. Sutherland 氏(U. Sheffield & Oxford)、 川谷康太郎氏 (名古屋大学)、 池田暁志(東京大学) を招聘し研究活動を行った。

また京都大学で「Stability Conditions and Related Topics in Kyoto」を主催した。その際には、Z. Hua 氏(Kansas State U. & Chinese University of HK)、J. Huizenga 氏(UI Chicago)、椎名貴久氏 (工学院大学)、T. Sutherland 氏(U. Sheffield & Oxford)、川谷康太郎氏 (名古屋大学)、 池田暁志(東京大学)に講演をして頂いた。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）
On Euler characteristics for large Kronecker quivers, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I (2012), Vol. 350, Issues 5, March 2012, Pages 273-276.

〔学会発表〕（計　３件）

岡田崇、Homological mirror symmetries and stability conditions、場の数理とトポロジー、信州大学、２月８日、2013.

岡田崇、On Euler characteristics for large Kronecker quivers、日本数学会 2012 年度秋季総合分科会、九州大学、9 月 20 日、2012 年.

岡田崇、On Euler characteristics for large Kronecker quivers、 The 3rd GCOE Workshop for Young Mathematicians、京都大学、 ２月 20 日、2012 年.

〔その他〕
ホームページ等
http://dl.dropboxusercontent.com/u/2880079/main.html

６．研究組織
(1)研究代表者
岡田　崇（OKADA SO）
小山工業高等専門学校・一般科・講師
研究者番号：50547015