

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 9 日現在

機関番号：12601

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23740013

研究課題名(和文) 局所的な手法による Galois 表現の研究

研究課題名(英文) Research on Galois representations by local methods

研究代表者

今井 直毅 (Imai, Naoki)

東京大学・数理(科)学研究科(研究院)・准教授

研究者番号：90597775

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000 円、(間接経費) 1,020,000 円

研究成果の概要(和文)：局所 Langlands 対応の幾何学的実現について研究した。具体的には、Lubin-Tate 空間の極限空間である Lubin-Tate パーフェクトイド空間の中にアフィノイドの族を構成し、その還元のコホモロジーが epipelagic な表現に対する局所 Langlands 対応及び、局所 Jacquet-Langlands 対応を実現していることを、馴分岐の場合に証明した。

研究成果の概要(英文)：We studied a geometric realization of the local Langlands correspondence. More specifically, we constructed a family of affinoids in the Lubin-Tate perfectoid space, which is a limit space of Lubin-Tate spaces, and proved that the cohomology of the reductions realizes the local Langlands correspondence and the local Jacquet-Langlands correspondence for the epipelagic representations in the tame case.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：Galois 表現

### 1. 研究開始当初の背景

GL(n) に対する局所 Langlands 対応は、保型表現の技術を用いて証明されていたが、その幾何とのつながりは十分に理解されていなかった。

### 2. 研究の目的

局所的な手法によって、Galois 表現、特に局所 Langlands 対応の実現を調べることを目的とした。

### 3. 研究の方法

Coleman による安定被覆の理論に基づいた手法で、Lubin-Tate 空間を調べた。Scholze-Weinstein による Lubin-Tate パーフェクトイド空間の手法も取り入れた。

### 4. 研究成果

代数曲線の場合に知られていた不安定被覆と不安定モデルの対応の理論を、リジッド曲線の枠組みに一般化した。さらに、不安定モデルを用いてリジッド曲線の 1 進エタールコホモロジーの重さスペクトル系列を構成しその関手性を示した。

上記の結果を用いて、レベル 3 の Lubin-Tate 曲線の安定モデルを構成し、そのコホモロジーを決定することに成功した。特筆すべき点は、剰余標数が 2 である場合も扱っていることであり、この場合には、他の剰余標数の場合と安定モデルの構造が大きく異なっていることが分かった。

剰余標数が 2 の場合は、Lubin-Tate 曲線のコホモロジーの中に、指標の誘導で書けないような primitive な Galois 表現が現れることが知られていたが、それがどのような幾何学的仕組みで現れるかは理解されていなかった。この研究により、primitive な Galois 表現は、Lubin-Tate 曲線の還元に見える  $j$  普遍量 0 の超楕円曲線のコホモロジーの寄与として現れることが分かった。ちなみに、レベルが 3 というのは、Lubin-Tate 曲線のコホモロジーの中に、primitive な Galois 表現が現れる最初のレベルである。

さらに、得られた安定モデルの情報を用いて、Lubin-Tate 曲線のコホモロジーに局所 Langlands 対応が現れることを証明した。

剰余標数が 2 の場合、GL<sub>2</sub> に対する局所 Langlands 対応は Weil 表現を用いて構成されている。一方、Lubin-Tate 空間のコホモロジーに現れる対応は cuspidal type という、より小さい群の表現からの誘導で書くためのデータを用いて記述されるので、コホモロジーに現れた対応が実際に局所 Langlands 対応であることを示すのは非自明な問題であるが、イプシロン因子を計算することによって、このことを示すことができ

た。言い方を変えると、導手指数 3 の場合に、局所 Langlands 対応の cuspidal type による記述を与えることができた。

さらに Lubin-Tate 空間の極限空間である Lubin-Tate パーフェクトイド空間の中にアフィンノイドの族を構成し、その還元のコホモロジーが epipelagic な表現に対する局所 Langlands 対応及び、局所 Jacquet-Langlands 対応を実現していることを、馴分岐の場合に証明した。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

(雑誌論文)(計 8 件)

— Naoki Imai and Takahiro Tsushima, Cohomology of rigid curves with semi-stable coverings, to appear in Asian J. Math.

— Naoki Imai and Takahiro Tsushima, Explicit construction of semi-stable models of Lubin-Tate curves with low level, to appear in RIMS Kokyuroku Bessatsu

— Naoki Imai and Takahiro Tsushima, Action of Hecke operators on cohomology of modular curves of level two, Math. Z. 273 (2013), no. 3-4, 1139-1159.

— Naoki Imai and Yoichi Mieda, Toroidal compactifications of Shimura varieties of PEL type and its application, RIMS Kokyuroku Bessatsu B44 (2013), 3-24.

— Naoki Imai, On the connected components of moduli spaces of Kisin modules, J. Algebra 349 (2012), no. 1, 1-7.

— Naoki Imai, Dimensions of moduli spaces of finite flat models, Galois-Teichmüller Theory and Arithmetic Geometry, Adv. Stud. Pure Math. 63 (2012), 251-262.

— Naoki Imai, Ramification and moduli spaces of finite flat models, Ann. Inst. Fourier 61 (2011), no. 5, 1943-1975.

— Naoki Imai, Filtered modules corresponding to potentially semi-stable representations, J. Number Theory 131 (2011), no. 2,

〔学会発表〕(計 20 件)

- Naoki Imai, Good reduction of affinoids for epipelagic representations in the Lubin-Tate perfectoid space, Arithmetic and Algebraic Geometry 2014, 東京大学大学院数理科学研究科, 2014 年 1 月 29 日.
- Naoki Imai, Good reduction of affinoids for epipelagic representations in the Lubin-Tate perfectoid space, Conference on Local Langlands Conjecture and Galois Representations, TATA Institute of Fundamental Research, 2013 年 12 月 30 日.
- 今井 直毅,  $p$  進 Langlands 対応, 代数的整数論とその周辺, 京都大学数理解析研究所, 2013 年 12 月 12 日.
- 今井 直毅, 局所 Langlands 対応と Lubin-Tate パーフェクトイド空間, 談話会, 東京大学大学院数理科学研究科, 2013 年 12 月 6 日.
- 今井 直毅, Lubin-Tate perfectoid 空間とモジュラー曲線の半安定モデル,  $p$  可除群とそのモジュライに関する最近の進展, 京都大学, 2013 年 5 月 11 日.
- 今井 直毅, 半完全環上の Dieudonné 理論,  $p$  可除群とそのモジュライに関する最近の進展, 京都大学, 2013 年 5 月 8 日.
- Naoki Imai, Stable models of Lubin-Tate curves with level three, Automorphic Functions and Arithmetic Geometry: A symposium for Prof. L. Lafforgue's visit, 九州大学, 2013 年 4 月 28 日.
- Naoki Imai, Good reduction of ramified affinoids in the Lubin-Tate perfectoid space, 東京北京パリ数論幾何セミナー, 東京大学, 2013 年 4 月 24 日.
- 今井 直毅, Breuil window の理論, 数論幾何学セミナー, 北海道大学, 2013 年 3 月 7 日, 8 日.
- Naoki Imai, Potentially good reduction loci of Shimura varieties, Korea-Japan Joint Seminar on Number Theory and Related Topics, 梨花女子大学校, 2013 年 1 月 23 日.
- Naoki Imai, Good reduction of ramified affinoids in the Lubin-Tate perfectoid space, Workshop on Modular forms and Galois representations, Korea Institute for Advanced Study, 2013 年 1 月 7 日.
- Naoki Imai, Local moduli of  $p$ -divisible groups, Workshop on Geometrical perspective of topological modular forms, 東京大学大学院数理科学研究科, 2012 年 11 月 16 日.
- Naoki Imai, Lubin-Tate perfectoid space in positive characteristic, 玉原数論幾何研究集会, 玉原国際セミナーハウス, 2012 年 10 月 22 日.
- Naoki Imai, Potentially good reduction loci of Shimura varieties, Symposium on Arithmetic Geometry, 九州大学, 2012 年 10 月 20 日.
- Naoki Imai, Geometric realization of the local Langlands correspondence for representations of conductor three, Workshop on the arithmetic geometry of Shimura varieties, representation theory, and related topics, 北海道大学, 2012 年 7 月 18 日.
- Naoki Imai, Cohomology of crystalline loci of open Shimura varieties of PEL type, 東京数論幾何週間, 東京大学, 2012 年 6 月 7 日.
- Naoki Imai, Representations of conductor three in cohomology of Lubin-Tate spaces of height two, Workshop on  $p$ -adic arithmetic geometry and motives, 東北大学, 2012 年 1 月 24 日.
- 今井 直毅, PEL 型開志村多様体のコンパクト台コホモロジーと隣接輪体コホモロジー, 代数的整数論とその周辺, 京都大学数理解析研究所, 2011 年 11 月 29 日.
- Naoki Imai, Dimensions of moduli spaces of finite flat models, The Third PanAsian Number Theory Conference, Chinese Academy of Sciences, 2011 年 8 月 22 日.

— Naoki Imai, Cohomology of rigid curves with semi-stable coverings, Workshop on the arithmetic geometry of Shimura varieties and Rapoport-Zink spaces, 京都大学, 2011年7月7日.

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

今井 直毅

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授  
研究者番号：90597775