様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月 １０ 日現在

機関番号： １４３０１
研究種目： 若手研究(B)
研究期間： 2011～2014
課題番号： ２３７４００１６

研究課題名（和文） 正標数代数閉体上の代数多様体の特異点解消について

研究課題名（英文） Resolution of singularities of an algebraic variety over an algebraically closed field in positive characteristic

研究代表者
川ノ上　帆（Kawanoue, Hiraku）

京都大学・数理解析研究所・助教

研究者番号：５０４６７４４５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：与えられた多様体に対しある非特異多様体からの双有理固有写像を特異点解消という。任意の多様体が特異点解消を持つか否かは代数幾何における最重要問題の一つであり、標数が０の場合は廣中平祐先生により任意次元で解決されたが正標数の場合は３次元までしか知られていない。
代表者はイデアリスティックフィルトレーションプログラム(IFP)というアプローチを提唱しPurdue大学の松木氏と共同で正標数一般次元の特異点解消に取り組んでいる。本研究ではIFPを推進し、解消プロセスの代数化や単項型非特異性原理など基礎的な性質を確立する一方で、実際にアルゴリズムを実装し２次元埋め込み特異点解消のIFPによる別証明を与えた。

研究成果の概要（英文）：For a given variety, a proper birational morphism from some nonsingular variety to it is called its resolution of singularities. The existence of resolution of singularities for any variety is one of the most important problem in algebraic geometry. In characteristic 0, it is solved by Professor Hironaka in any dimension. However, it is only known up to 3 dimensional case in positive characteristic.
I proposed an approach "Idealistic Filtration Program (IFP)" to attack this problem in positive characteristic and in any dimension, and develop it jointly with Professor Matsuki (Purdue University). By this grant, we had further development in the theory of IFP. Namely, we established several fundamental properties in IFP such as the algebraization of the operations in resolution process or the nonsingularity principle in monomial cases. Also, we implemented IFP into an exact algorithm in the case of embedded resolution for surfaces, which gives an alternative proof of its existence.

研究分野： 代数幾何学

キーワード： 代数幾何学　特異点解消　IFP

１．研究開始当初の背景
特異点解消は代数幾何学において大変重要な問題である。その研究は 1960・70 年台に一つのピークを迎え、広中先生により標数０任意次元の場合が、アビヤンカー氏により標数７以上かつ３次元の場合が解決された。しかしこの２つの大定理の後、部分的な進展や少し違った文脈での進展（デヨン氏のオルタレーションなど）はあったものの狭義の特異点解消においては革新的なアイディアは現れず長い停滞期を迎えることとなる。

それが近年、ビーエルストーン氏・ミルマン氏やヴィラマイヨール氏による標数０の場合の証明の簡易化などを踏まえて再び正標数の特異点解消が脚光を浴びるようになった。コサール氏・ピルタント氏により標数が 2，3，5 の時も含めて３次元の場合が完全に解決される一方、任意次元の場合に関しても広中先生、ヴィラマイヨール氏他により独立に新しいアプローチが提唱され、各アプローチのアイディアや基礎的な成果が公開された。代表者もその内の一人であり、ＩＦＰというアプローチを提唱して Purdue 大学の松木氏と共同でその基礎理論を発展させていた。これが本研究開始時の背景である。

２．研究の目的
本研究は代数閉体上定義された代数多様体の特異点解消を扱った。代数閉体上という条件を付けたのは、この場合によい形で解決すれば自然により一般な完全体の場合も解決しこれが十分広いクラスでの解を与えること、また不完全体の場合は全く違った現象が発生することなどから代数閉体の場合が最初のステップとして適当な定式化であると考えられるからである。研究目的は正標数任意次元における特異点解消の存在の証明を目指すというものであり、ＩＦＰの基礎理論を発展させ、ＩＦＰに沿った具体的なアルゴリズムを提示する形でのこの問題の解決を目指した。後に述べる通り中心的な課題は例外因子を組み込んだアルゴリズムの実装の部分であり、２種類のアルゴリズムの候補それぞれについて解析を行った。

３．研究の方法
まず正標数における特異点解消が標数０の場合と比べてなぜ難しいのかという理由を説明する。標数０の場合は特異点が最も悪い点の集合（重複度の最大軌跡）を含む滑らかな（局所）超曲面が存在することが知られている。この超曲面を最大接触超曲面と呼ぶ。標数０の特異点解消の証明においては重複度の一般化である不変量を定義する。更にこの不変量が爆発の中心を指定し、爆発によって減少し、最小値をとるとき非特異になることを示す。一旦このような不変量が得られれば特異点解消は自動的に得られる。そしてこの不変量を定義するときに上記の最大接触超曲面が必要不可欠となるのである。もう少し詳しく言うと、最大接触超曲面を全空間と思うことで次元の帰納法を用いるというのがこの証明の根本にあるアイディアである。ところが正標数の場合、最大接触超曲面は一般には存在せず標数０での証明はそのままでは機能しない。そこで最大接触超曲面の代替物をいかにして見つけるかというのが正標数の場合の最初の問題となる。

歴史的に代替物の候補として主に考えられてきたのは標数ｐ冪の元である。この時最大接触超曲面上の重複度に対応するのはｐ冪元を無視してはかった重複度（剰余重複度）であるが、剰余重複度は一般には爆発によって増加してしまう。そこで代表者は特異点解消の対象を一般化したイデアリスティック・フィルトレーションと呼ばれる概念を導入し、そこから自然に決まる先頭生成系と呼ばれる特殊な形の（非特異とは限らない）局所超曲面の集合を最大接触超曲面の代替物として採用するアプローチを提唱した。この先頭生成系を用いて標数０と類似の不変量・アルゴリズムを構成するというのがＩＦＰの骨子である。

先頭生成系が非特異とは限らないためこのようなアプローチは一見蛮勇にうつる。即ち、先頭生成系上の重複度の上半連続性や不変量の最大軌跡の非特異性といった標数０においては最大接触超曲面の非特異性から自明に従った性質がここでは期待できないかに見える。しかし実際は先頭生成系が任意の特異超曲面ではなく微分作用素と相性の良い特殊な形の元で与えられていることからこれらの性質が成り立つことが証明できる。この種の先頭生成系の特異性に起因する基礎理論の問題点は本研究開始時には「概ね」解決されていた。そこで本研究の主要な焦点は標数０の時にそうであったように例外因子の寄与まで組み込んだ具体的なアルゴリズムを提示することとなる。

これに関連してイデアリスティック・フィルトレーションの飽和という概念がある。これは特異点解消のアルゴリズムに対して自然と思われる操作で対象を大きくする操作であり、例えば上記の先頭生成系を定義するためには微分飽和という操作が不可欠である。アルゴリズムを構築する際にも、どの種の飽和を許すかによって話は全く違ってくる。ＩＦＰの哲学としては考えられる飽和はすべて組み込んで対象をできるだけ大きくするほうが自然であると捉える。ところが実際に不変量を構成する際、根基的飽和（通常のイデアルでいうところの整閉包に対応する）という操作を組み込むと計算が難しくなり爆発に際しての非増加性がよくわからなくなる。一方、根基的飽和を組み込まなければ話はうまくいくかというと、不変量が最小にな

った状態の一つである単項型と呼ばれる場合に特異点が十分改良されておらず更なる解析が必要になるという問題がある。このような状況を鑑み、
（A）根基的飽和を組み込んだアルゴリズムにおいて爆発での振る舞いを解析する、
と同時に
（B）根基的飽和を組み込まないアルゴリズムにおける単項型の解析を進める、
という方針で研究を進めた。（A）はかなり環論色の強い問題であり、例を沢山計算したり環論の専門家に相談したりして研究を進めた。一方（B）については全空間３次元の場合（即ち曲面の埋め込み特異点解消）に焦点を絞り松木氏と共同で研究を進めた。開始時点でヴィラマイヨール氏らスペイングループも枠組みは違うもののやはり彼らの意味での単項型の解析に取り組んでいたので彼らとも議論して突破口を模索した。

他に、やや技術的になるが、アルゴリズムに現れる同伴改変と呼ばれる操作が局所環の完備化レベルでしか定義されておらずそのままではアルゴリズムが代数的に定義されないという問題があった。これはＩＦＰの基礎理論において懸案の瑕疵であり、この問題についても研究を進めた。因みにこの部分は京都大学の森先生他からヘンゼル化を経由する降下の手法を示唆されていたものの我々の能力不足で本研究開始時点では確立されていなかったものである。

以上が研究方法の数学的な側面である。以下実際上の研究体制について述べる。共同研究者である松木氏とは e-mail やスカイプなどで日常的に議論や情報交換を行った。また毎年夏に三か月ほど松木氏が代表者の所属である数理解析研究所に滞在し集中して研究を進めた。またアプローチこそ違え問題意識を共有していて深いレベルで議論できるマドリッド自治大学のヴィラマイヨール氏のグループ、剰余重複度ほか特異点解消の古典的な成果に造詣の深いウィーン大学のハウザー氏、２次元、３次元のコサール氏他の仕事に詳しいレーゲンスブルグ大学のショーバー氏など同分野の研究者達を訪問して議論と情報交換を行った。

４．研究成果

本研究の最終目的であった正標数一般次元の特異点解消を達成することはできなかった。むしろ研究を進めるにつれさまざまな障害が明らかになり、問題の難しさを再確認する結果となったといわざるを得ない。とはいえＩＦＰを発展させるという立場から見ると幾つかの部分的な結果が示せたので一定の成果は得られたと考えている。これらの結果は発表論文欄の２本の論文に収められている。以下にその内容を詳述する。

まず（A）の根基的飽和を組み込んだアルゴリズムに関する結果を述べる。この方向では当初標数０の場合に従った素朴な定義を採用していたが、研究を進めるうちに爆発で不変量が増加する例が構成できてしまった。このため整閉包を組み込む方向で研究を進めるためにはアルゴリズムにより劇的な変更を加える必要がある。現在は従来の弱変換型のイデアリスティック・フィルトレーションの拡大操作を全て狭義変換型の拡大にとりかえるという方針で研究を進めている。この方針は整閉包との相性も良くより幾何学的な方針ではあるのだが、未だ基本的な対象の有限生成性などが証明できておらず結果を公表するには至っていない。一方でポジティブな結果としては不変量が最小となる状態の一つであった単項型と呼ばれる場合においても非特異性原理と呼ばれるタイプの定理が成り立つことが証明できた。この結果は要するに一旦不変量が最小になれば標数０の時と同様直ちに特異点解消が構成できるという主張であり、まだ途中のアルゴリズムは確定していないものの大きな進歩であると考えられる。以上が方針（A）に関して得られた結果である。

次に（B）の根基的飽和を組み込まないアルゴリズムに関する結果を述べる。この方向では単項型になっても（A）のように非特異性原理が成り立たず更なる解析が必要だったのであるが、全空間３次元の場合に限っては一旦単項型に辿り着いてから定義される新たな不変量を導入することにより単項型の解析に成功した。この時の証明は曲面が任意次元の全空間に埋め込まれているときにも有効であり、ＩＦＰによる曲面の埋め込み特異点解消の別証を与えている。ここで導入した単項型用の不変量はベニート氏・ヴィラマイヨール氏が彼らの単項型の場合に行った議論を精査し大幅に簡易化することで得られたものである。曲面の埋め込み特異点解消はコサール氏・ヤンセン氏・斉藤氏により比較的最近証明された（但し全空間が３次元の場合に限ってはアビヤンカー氏・広中氏により早くから証明されている）。またベニート氏・ヴィラマイヨール氏も別証を与えている。これらの証明に比べＩＦＰの別証は初めて爆発ごとに狭義減少する不変量を与えた点が長所であり、その意味でより構成的で明快な証明となっている。現在はこの証明を発展させる方向で全空間４次元、即ち３次元多様体の埋め込み特異点解消について研究を進めている（３次元多様体の非埋め込み特異点解消は既に証明されているが埋め込み特異点解消の方は未解決である）。上記の単項型用の不変量は非常に技巧的に構成されておりなぜうまく機能するかの概念的な説明は得られていない。そこで全空間４次元の場合に進むための準備として、上記の単項型用の不変量について古典的な剰余重複度を用い

た解釈を与えた（論文執筆中）。以上が方針（B）に関して得られた結果である。

最後に基礎理論の部分については同伴改変の代数化に成功した。これは当初の想定通りヘンゼル化を経由した降下理論を用いるものであったが実際に証明として完成するには暫く時間がかかった。助言を下さった先生方の御慧眼に深く感謝するものである。

以上が本研究において得られた成果である。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　２　件）

① H. Kawanoue and K. Matsuki "Resolution of singularities of an idealistic filtration in dimension 3 after Benito-Villamayor" Adv. Stud. Pure Math. 査読あり、受理済（印刷中）

② H. Kawanoue "Introduction to the Idealistic Filtration Program with Emphasis on the Radical Saturation" Clay Math Proc. 査読あり、Vol. 20, 2014, pp.285-317 (http://www.claymath.org/proceedings-volume-20-contents)

〔学会発表〕（計　11　件）

① "IFP and R-saturation", 2011/05/27「Workshop on Algebraic Geometry in Positive Characteristic」、韓国高等科学院（ソウル、韓国）

② "IFP and R-saturation", 2011/08/25「特異点とそのひろがり」、京都大学

③ "Toward resolution of singularities in p>0", 2012/01/20「Oberseminar Arithmetische Geometrie」、レーゲンスブルグ大学（レーゲンスブルグ、ドイツ）

④ "Toward resolution of singularities in p>0", 2012/02/17「Seminari de Geometria Algebraica」、バルセロナ大学（バルセロナ、スペイン）

⑤ "Idealistic Filtration", "Idealistic Filtration Program", 2012/06/28-29「クレイ研究所夏の学校：特異多様体の解消」、オーバーグルグル大学センター（オーバーグルグル、オーストリア）

⑥ "Monomial case in IFP", "Construction of invariant in IFP for surface case", 2012/11/09, 23「Research in Team in ESI」、エルヴィン・シュレディンガー研究所（ウィーン、オーストリア）

⑦ "Resolution of singularities in positive characteristic (in dimension 2)", 2012/11/16「Recent Trends on the problem of desingularization in positive characteristic」、数理科学研究所（マドリッド、スペイン）

⑧ "特異点解消の最近", 2014/02/17「第９回代数・解析・幾何学セミナー」、鹿児島大学

⑨ "On non-recursively free plane arrangements", 14/10/21「Seminaires Algebre Geometrie」、ヴェルサイユ大学（ヴェルサイユ、フランス）

⑩ "Idealistic Filtration Program and the surface resolution of singularities", 14/10/22「Seminaires sur les singularites」、パリ第七大学（パリ、フランス）

⑪ "On non-recursively free arrangements", 15/05/15「Workshop: Nested Subring Conditions」、ＣＩＲＭ（マルセイユ、フランス）

〔図書〕（計　０　件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計　０　件）

○取得状況（計　０　件）

〔その他〕

ホームページ等

http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/ja/list/kawanoue.html

６．研究組織

(1)研究代表者

川ノ上　帆（KAWANOUE Hiraku）

京都大学・数理解析研究所・助教

研究者番号：５０４６７４４５

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし