

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 6 日現在

機関番号：13103

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23740018

研究課題名(和文) 重さ半整数ジーゲル保型形式におけるリフティングの研究

研究課題名(英文) Lifting for Siegel modular forms of half-integral weight

研究代表者

林田 秀一 (HAYASHIDA, SHUICHI)

上越教育大学・学校教育研究科(研究院)・准教授

研究者番号：80597766

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円、(間接経費) 750,000円

研究成果の概要(和文)：保型形式は強い対称性を持つ複素関数で、多変数保型形式のなす空間の間にはリフティングとよばれる写像が存在することがある。L関数の関係式や特殊値を調べるのが整数論の一つの重要な課題であり、リフティングは多変数保型形式の空間の構造やL関数を調べる上で有効である。

本研究において、2つの楕円保型形式から重さが半整数の一般偶数次数のジーゲル保型形式へのリフティングを、構成した形式が非零という仮定の元、得ることができた。この証明の為に、重さ整数のジーゲル-アイゼンシュタイン級数並びに重さ半整数の一般化コーエン型アイゼンシュタイン級数のフーリエ係数の間の関係式、つまりマース関係式の一般化、等を得ている。

研究成果の概要(英文)：Modular forms are functions of complex variables which have nice transformation formula. So-called "liftings" are certain maps between the space of modular forms of several variables and "liftings" are useful to investigate the structure of the space of modular forms and the properties of the L-functions.

In this study I obtained lifting maps from two elliptic modular forms to Siegel modular forms of half-integral weight of even degrees under the assumption that the constructed form does not vanish. To show the lifting I obtained a certain generalization of the Maass relation for Siegel modular forms of half-integral weight of even degrees.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：ジーゲル・アイゼンシュタイン級数 マース関係式 重さ半整数の保型形式 リフティング Zharkovskaya's theorem

### 1. 研究開始当初の背景

(1) 保型形式におけるリフティング理論はラングランズ予想に関連し、また保型 L-関数の解析的性質とその特殊値を調べる上で有用であり、整数論の分野において研究が盛んである。2001年に池田保氏により証明された一般偶数次数ジエゲル保型形式のリフティングは従来知られていた Saito-Kurokawa リフティングを一般化したリフティングであり、一般次数のジエゲル保型形式及びその L-関数の研究への突破口となった。

(2) 具体的に例えば、W.Kohnen 氏により Ikeda リフトで得られるジエゲル保型形式のフーリエ係数(行列指数で次数 1)が満たす関係式が知られていたが、研究代表者は、整数指数で奇数次数のフーリエ係数間の関係式を導いた。関係式の中に Satake パラメータを用いるという点にアイデアがあり、この関係式は B.Heim 氏による、次数 3 の Ikeda-Miyawaki リフトのスピノル型 L-関数の具体的表示の証明や桂田英典氏と河村尚明氏による池田予想の証明の中などで使われていた。また研究代表者により 2 つの楕円保型形式から次数 2 の重さ半整数のジエゲル保型形式へのリフティングが得られていた。

### 2. 研究の目的

(1) リフティングを一般化すること。具体的には次数 2 で得た、重さ半整数ジエゲル保型形式へのリフティングを一般の偶数次数で証明する。そのために、Siegel-Eisenstein 級数のフーリエ・ヤコビ係数の間の関係式と、ヤコビ形式におけるヘッケ作用素とジエゲル作用素の可換性を証明する。

(2) Ikeda リフトを経由して構成することのできる重さ半整数のジエゲル保型形式を調べる。具体的には、そのフーリエ・ヤコビ係数から構成することのできるディリクレ級数を考察し、その解析的性質ならびに、この級数を既知の保型形式の L-関数で記述する。また Kohnen-Skoruppa のディリクレ級数の理論の拡張、Waldspurger-Kohnen-Zagier の公式の一般化を目論む。

(3) 重さ半整数の保型形式の部分空間であるコーネン・プラス空間とフルモジュラーの楕円保型形式の空間が志村対応により、1対1に対応することが知られている。ヤコビ形式のプラス空間を導入し、この志村対応をヤコビ形式の場合に一般化する。

### 3. 研究の方法

(1) 一般偶数次数での重さ半整数ジエゲル保型形式へのリフティングを証明するために、重さ半整数ジエゲル保型形式でのマース関係式を次数 3 から一般奇数次数に拡張する。その為には、Siegel-Eisenstein 級数の

フーリエ・ヤコビ係数を調べ、その間の関係式を得る。

(2) Ikeda リフト、Fourier-Jacobi 展開、Eichler-Zagier-Ibukiyama 対応を経由することで楕円保型形式から重さ半整数のジエゲル保型形式を構成することができる。このフーリエ・ヤコビ係数に付随するディリクレ級数を調べ、Kohnen 氏と Skoruppa 氏によるディリクレ級数の理論を重さ半整数の一般奇数次数の場合に拡張する。

(3) ヤコビ形式でのプラス空間を導入し、ヤコビ形式の指数のサイズが異なる空間同士の同型対応を導き、また数値実験により、ヤコビ形式のなす空間での志村対応が存在するか調べる。

### 4. 研究成果

(1) 2 つの楕円保型形式から一般偶数次数で重さ半整数のジエゲル保型形式へのリフティングを証明した。これは本研究課題においての大きな目標の一つであった。研究代表者は、本研究課題の申請時の段階で、この特別な場合、つまり 2 つの楕円保型形式から次数 2 で重さ半整数のジエゲル保型形式のリフトを既に証明していた。保型形式の理論において重要なラングランズ・アーサー予想でも説明することのできないこのリフトをさらに一般次数に拡張したことに強い意義がある。次数 2 の場合については、代数学シンポジウムや国内外の研究集会で発表しており、また一般次数の場合についても、昨年度末の上海での国際研究集会において講演を行った。この研究成果については現在、論文を執筆中である。

(2) Miyawaki-Ikeda リフトのスピノル型 L-関数の具体的表示を証明した。次数 3 については、既に B. Heim 氏により証明されていたが、本研究において、その具体的表示を一般の奇数次数に拡張することができた。ジエゲル保型形式のスピノル型 L-関数については、一般に解析接続や関数等式は得られておらず、特別な場合のジエゲル保型形式においては、そのスピノル型 L-関数を 2 つの楕円保型形式から得られる対称テンソル型の L-関数に帰着できるという事を示した点に意味がある。この結果については 2014 年に雑誌 Int. J. Number Theory に論文を掲載している。

(3) 重さ整数のジエゲル・アイゼンシュタイン級数において、square similitude に関するヘッケ作用素に関しての一般化マース関係式を証明した。山崎正氏が 1989 年に出した結果では、この一般化マース関係式の途中までが証明されていたが、本研究において、それを精密化した。これにより、Miyawaki-Ikeda リフトの特別な場合での別証明を

えた。一般化マース関係式それ自体がジークル保型形式のフーリエ係数の関係式であり、興味深い現象である。例えば、桂田英典氏により得られているジークル・アイゼンシュタイン級数のフーリエ係数の具体的表示からは、一般化マース関係式を導くことは困難である。一般化マース関係式は、ヘッケ作用素の双対性とも捉えることのできる現象で、このような関係式を用いた多変数保型形式の研究が今後有用であると思われる。この結果は2013年に雑誌 *Comment. Math. Univ. St. Pauli* から論文として発表している。

(4) 重さ半整数の一般化コーエン型アイゼンシュタイン級数に関して一般化マース関係式を証明した。この一般化マース関係式は重さ半整数の一般偶数次数へのリフトの証明において重要な役割を果たす。コーエン型アイゼンシュタイン級数は一変数の場合に、H.Cohen 氏により導入され、志村対応により重さ整数のアイゼンシュタイン級数と対応することが知られている。一般化コーエン型アイゼンシュタイン級数においても、何らかの性質を持つことが期待されていたが、本研究においては、そのフーリエ係数の関係式を得ている。今後、志村対応の一般化や L-関数の特殊値等の研究において重要な役割を果たすと思われる。また、谷川好男氏により次数2の重さ半整数アイゼンシュタイン級数の一般化マース関係式が示されていたが、それはレベル付きの理論であり、本研究においてはレベル1、つまりフルモジュラーに対応するアイゼンシュタイン級数についてマース関係式を示している点に特徴がある。また次数2のみでなく、一般の次数についてコーエン型アイゼンシュタイン級数のマース関係式を証明した。この結果は(1)の結果の論文とまとめて執筆中である。

(5) 行列指数で重さが整数のヤコビ形式の空間と整数指数で重さが半整数のヤコビ形式の空間との同型対応を示した。重さ半整数の保型形式においてはレベルが4で割れる必要があるが、W.Kohnen 氏はコーネン・プラス空間と呼ばれる空間を導入することで、ニューフォームにあたる部分空間を調べ、志村対応においてレベル1の重さ整数の保型形式の空間とコーネン・プラス空間が同型対応であることを証明していた。また、伊吹山知義氏は、このコーネン・プラス空間を一般のジークル保型形式で導入し、その一般化プラス空間と一般次数の指数1のヤコビ形式との同型対応を証明していた。本研究においては、重さ半整数のヤコビ形式の空間に、レベル1に相当するプラス空間を定義し、またそのヤコビ・プラス空間が重さ整数の行列指数のヤコビ形式の空間と、ヘッケ作用素の可換性も含めて、同型に対応することを証明した。このヤコビ・プラス空間が重さ整数で指数が整数のヤコビ形式の空間と対応するか

どうか調べるのが今後の課題である。また、伊吹山知義氏により予想されている次数2のジークル保型形式の場合の志村対応に、プラス・ヤコビ空間を用いたアプローチも考えられる。

(6) Zharkovskaya-Krieg の定理のヤコビ形式での類似を証明した。Zharkovskaya-Krieg の定理とは、ジークル・ファイ作用素とヘッケ作用素の間の可換性に関する結果である。N.A.Zharkovskaya 氏により、そのような可換性が証明されており、A.Krieg 氏により、ヘッケ環の生成元とジークル・ファイ作用素との可換性が具体的に決定されていた。本研究においては、サイズが2の行列指数のヤコビ形式で重さが整数の場合に、ヘッケ作用素の代わりに指数変換作用素を用いて、Zharkovskaya-Krieg の定理の類似を証明した。またヤコビ形式間の同型対応を用いることで、Zharkovskaya-Krieg の定理の類似が指数整数で重さが半整数のヤコビ形式においても成り立つことを同様に証明した。また、この結果は、(1) のリフティングの証明の際に必要であった。

(7) 重さ半整数のジークル保型形式に関する Kohnen-Skoruppa 型ディリクレ級数の具体的表示を考察し、重さ半整数のあるジークル保型形式のフーリエ・ヤコビ係数から構成されるディリクレ級数の別表示を得た。これは、W.Kohnen 氏と D.Zagier 氏の論文 *Values of L-series of modular forms at the center of the critical strip* に書かれている結果の一部の拡張である。具体的には、池田リフト、フーリエ・ヤコビ展開、Eichler-Zagier-Ibukiyama 対応を経由して得られる、重さ半整数の奇数次数のジークル尖点形式をフーリエ・ヤコビ展開し、そのフーリエ・ヤコビ係数のピーターソン内積を分子にもつディリクレ級数を考え、一般化マース関係式を用いて、基本判別式毎の和に表すというものである。楕円保型形式の場合には、これは保型形式の L-関数の特殊値の平均の漸近公式と結びついている。一般次数の場合には、このような L-関数の特殊値の平均の漸近公式は得られていないが、今後の研究により、別の形の L-関数の特殊値の平均の漸近公式などが得られる可能性がある。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計4件)

1 S. Hayashida, On the spinor L-function of Miyawaki-Ikeda lifts, *Int.J.Number Theory*, 査読有, Vol 10, No2, 2014, 297-307, DOI:10.1142/S1793042113500930

2 S. Hayashida, On generalized Maass

relations and their application to Miyawaki-Ikeda lifts, Comment. Math. Univ. St. Pauli. 査読有, Vol 62, No 1, 2013, 59-90,  
[https://rikkyo.repo.nii.ac.jp/?action=pages\\_view\\_main&active\\_action=repository\\_view\\_main\\_item\\_detail&item\\_id=7398&item\\_no=1&page\\_id=13&block\\_id=49](https://rikkyo.repo.nii.ac.jp/?action=pages_view_main&active_action=repository_view_main_item_detail&item_id=7398&item_no=1&page_id=13&block_id=49)

3 林田秀一, 二つの楕円保型形式から重さ半整数 Siegel 保型形式へのリフト, 第 19 回整数論サマースクール報告集, 査読無, 2011. 302-321,  
[http://www.sci.kumamoto-u.ac.jp/~narita/ss2011\\_proceedings.htm](http://www.sci.kumamoto-u.ac.jp/~narita/ss2011_proceedings.htm)

4 林田秀一, 次数 2 の重さ半整数ジーゲル保型形式へのリフティング, 第 5 6 回代数学シンポジウム報告集, 査読無, 2011. 14 ページ,  
[http://server03.mathsoc.jp/section/algebra/algsymp\\_past/algsymp11.html](http://server03.mathsoc.jp/section/algebra/algsymp_past/algsymp11.html)

〔学会発表〕(計 8 件)

1 S. Hayashida, Lifts from two elliptic modular forms to Siegel modular forms of half-integral weight of even degrees, Explicit Theory of Automorphic Forms, 2014 年 3 月 28 日, 同済大学(中国・上海市)

2 S. Hayashida, Relations among Fourier coefficients of holomorphic Siegel-Eisenstein series, Workshop on modular forms and Jacobi forms, 2013 年 6 月 11 日, 上越教育大学

3 S. Hayashida, Generalized Maass relations and Miyawaki-Ikeda lifts, 27th Automorphic Forms Workshop, 2013 年 3 月 13 日, University of College Dublin (アイルランド・ダブリン市)

4 S. Hayashida, Numerical examples of Euler factors of Siegel modular forms of half-integral weight of degree three, 26th Automorphic Forms Workshop, 2012 年 4 月 28 日, University of British Columbia (カナダ・バンクーバー市)

5 林田秀一, Miyawaki-Ikeda リフトのスピノル L 関数について, 第 5 回ゼータ若手研究集会, 2012 年 2 月 11 日, 名古屋大学多元数理

6 林田秀一, 二つの楕円保型形式からの重さ半整数 Siegel 保型形式へのリフト, 第 19 回整数論サマースクール, 2011 年 9 月 9 日, 富士箱根ランド・スコレプラザホテル

7 S. Hayashida, Cohen type Eisenstein series of degree two and a relation among Fourier coefficients, 2011 International Conference on Number Theory, 2011 年 8 月 17 日, 上海交通大学(中国・上海市)

8 林田秀一, 次数 2 の重さ半整数ジーゲル保型形式へのリフティング, 第 5 6 回代数学シンポジウム, 2011 年 8 月 11 日, 岡山大学

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況(計 0 件)  
取得状況(計 0 件)

〔その他〕  
ホームページ等  
[http://www.juen.ac.jp/lab/~hayashida/index\\_jp.html](http://www.juen.ac.jp/lab/~hayashida/index_jp.html)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

林田 秀一 (HAYASHIDA, Shuichi)  
上越教育大学・学校教育研究科(研究院)・  
准教授  
研究者番号: 80597766