

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 9 日現在

機関番号：17701

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23740027

研究課題名(和文) ガロア変形論と保型性問題の帰納的構造の研究

研究課題名(英文) The study of Galois deformations and an inductive structure of their automorphy

研究代表者

山内 卓也 (Yamauchi, Takuya)

鹿児島大学・教育学部・准教授

研究者番号：90432707

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：本研究はガロア表現と呼ばれる代数的対象と保型形式と呼ばれる解析対象の間に成り立つと予想されている対応を確立することを目標として実行された。それぞれの対象をガロア表現およびその還元を通して比較するという標準的な方針があるが、これをうまく機能させるためには還元の形によって保型性問題を分割し、それらを纏め上げる必要がある。本研究では還元が保型的である場合に、その形がどのように簡略化できるかを調べた。

研究成果の概要(英文)：In this research project, the researcher carried out the program to study a correspondence between Galois representations (in the algebraic side) and automorphic forms (in the analytic side). Usually we understand it via p-adic Galois representations and its reduction which is often called mod p representation. Then we have to divide the modularity problem into the type of mod p representation in question and plug them into the full modularity problem.

In this project He studied the property of modular mod p representation so that any such representation could be reduced to a manageable class of mod p representation.

研究分野：数論

キーワード：ガロア表現 保型形式 保型性問題 セール予想 法p保型形式

1. 研究開始当初の背景

この研究を開始した頃に、ガロア表現の保型性問題に関して、大きな進展が海外で幾つかあった。ひとつは幾何的なガロア表現の剰余表現の潜在的保型性持ち上げ定理である。Sato-Tate 予想が解かれた当初は剰余表現の像に関して強い制約が課されていたが、ここ数年、Taylor の学生であった Jack Thorne によって、その条件が改良され、剰余表現の次元を表現の標数が割らない、且つ、既約である場合に保型性持ち上げ定理が改良された。その後、Thorne によって、剰余表現が可約の時に、それが二つの既約因子を持つ場合に、保型性持ち上げ定理が改良された。この動きと並行して、ガロア表現の保型性問題に必要な剰余表現に対する保型性問題、所謂、セール予想を定式化するための重さ予想が一般の設定で定式化されつつあった。セール予想を解決するためには、重さ予想の解決のみならず、その重さを如何に小さく還元できるかが重要である。また、セール予想を解決するためには剰余表現が可約な場合に Thorne の結果をより一般の設定で解決する必要があった。このような事情を鑑みて、研究目的を遂行するために、Thorne の結果の一般化と重さの還元の研究を同時に開始することになった。

2. 研究の目的

本研究の目的はガロア表現の保型性問題の解決であった。この問題の基本原理は保型性持ち上げ定理とセール予想にある。2007年に Khare と Wintenberger によって解決された $GL(2)/\mathbb{Q}$ の場合のセール予想の証明には種々の保型性持ち上げ定理と剰余表現が既約な場合の厳整合系への埋め込み定理の二つが重要な役割を果たした。これに、セール重さ、剰余表現の標数、および、セールレベルに関する3重帰納法を上手く回すことによって、証明が遂行された。その時に用いられた保型性持ち上げ定理は4種類であり、その内の一つが剰余表現が可約な場合の定理であった。このセール予想を応用することで現在では、かなり一般の設定で $GL(2)/\mathbb{Q}$ に対する(幾何的な)ガロア表現の保型性が解決されている(Emerton と Kisin による結果)。

本研究は上記のプロセスをより一般の代数群に値を取る有理数体の絶対ガロア群の p 進表現に対して保型性問題がどのように解決されるべきかその機能的構造を調べることを目的として遂行された。

上記のプロセスを鑑みると、ガロア表現の保型性を示すにはセール予想の解決が必要不可欠であり、またそれを解決するためには、種々の保型性持ち上げ定理と剰余表現の厳整合系への持ち上げ定理を確立する必要があった。

先ず、保型性持ち上げ定理は剰余表現が既

約な場合は前述の Thorne による結果によりかなり満足の行く形で結果が得られているので、剰余表現が可約な場合のときの扱いが重要であった。考察しているガロア表現の表現空間の次元が高い場合、剰余表現の既約因子が増え、それに応じて拡大類の構造も複雑になってくる、そのような表現の変形環を調べなければならないのだが、Thorne は既約因子の数が2個の場合にこれを調べ、Skinner-Wiles の $GL(2)/\mathbb{Q}$ の場合の結果を $GL(n)/K$ (K は CM 体)の場合に拡張した。この結果に触発されて、既約因子が3個以上の場合に変形環を調べそれを保型性持ち上げ定理に援用することを目的とした。

この期待される結果を $U(2,1)$, $GL(3)$, $GSp(4)$ などの比較的階数の小さい代数群に援用し、この場合のセール予想を解決を目標とした。また、この研究から得られる保型性問題の帰納的構造、つまり、考察しているガロア表現が値を取る代数群とその(意味のある)部分群に値を取るガロア表現の保型性問題との間の帰納的原理を見出すことが本研究の目的であった。これは p 進代数群の許容表現のラングランズの分類定理に類似する。

3. 研究の方法

セール予想の重さ予想に関連する重さの還元を調べるために正標数の志村多様体の幾何を応用する方法を取った。具体的には次の通り。考察している志村多様体が PEL 型としてその普遍アーベル多様体上の相対1形式を用いて定義される保型層のガウス・マニ接続の明示的な計算と志村多様体のエックダール・オールド階層の Zariski 閉方上に定義される部分ハッセ不変量を解析することで重さがどの程度還元されるかを調べるという手法を取った。また、テータ作用素と呼ばれる法 p 保型形式の成す空間の作用素を幾つかで定義し、それも用いて重さの還元を調べた。その際に必要となった、テータ作用素の像と核の調査は法 p 保型形式を志村多様体の超特異軌道に制限したときの様子で記述できると推察し、これを実行した。より正確にはテストケースとして、 $GSp(4)/\mathbb{Q}$ の場合にこれを実行し、感触を掴んでから一般の場合を実行した(現在も進行中)。

別の方法として、ordinary 表現の保型性持ち上げ定理を semi-ordinary もしくは ordinary だが十分正則でない場合に拡張することで、重さの還元を調べるという方法も実行した。

また、 $R=T$ の手法を用いて、Thorne の結果を剰余表現の既約因子が3個の場合に拡張し、テストケースとして GL_3 , $U(2,1)$, GSp_4 などの比較的階数の小さい群に関するガロア表現の保型性問題を調べるという方法を行った。

4. 研究成果

- (1) GSp_4 の場合に保型層のガウスマニニ接続を明示的に計算し、これを用いて、テータ作用素を3種定義し、それらを援用して重さの還元定理を証明した。これは Edixhoven による $\mathrm{GL}(2)/\mathbb{Q}$ の場合の結果の一般化にあたる。また、副産物として、Bocherer-Nagaoka が考察した古典的ジューゲル形式に対する Ramanujan 作用素の $\mathrm{mod} p$ 版は、上述したテータ作用素を組み合わせて幾何的に再構成できることが確認された。さらに、この Ramanujan 作用素の核を特徴づける幾何的な判定法を与えた。これらの結果は論文に纏め preprint-Arxiv に投稿した。

$\mathrm{GSp}(4)$ 以外の群でも計算過程はほぼ同様であるが、テータ作用素が増え、どの作用素を効果的に組み合わせて使うべきかは模索中であり、現在はそれに関する一部完成した内容について論文を執筆中である。

- (2) Gee-Geraghty が確立した ordinary ガロア表現に対する同伴形式の存在定理を Semi-ordinary なガロア表現の場合に拡張した。これは、 $\mathrm{GSp}(4)$ のセール予想を精密化する際に必要な定理であった。論文は現在執筆中である。
- (3) Thorne の剰余表現が可約な場合の保型性持ち上げ定理を剰余表現の既約因子の数が3個の場合に拡張した。この結果も、 $\mathrm{GSp}(4)$ のセール予想の解決に主眼を置いたものであった。論文は現在執筆中である。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 5 件)

- (1) Henry-H. Kim and T. Yamauchi, Cusp forms for exceptional group of type E_7 , to appear in *compositio math* 2015 (査読有)
- (2) Henry-H. Kim and T. Yamauchi, A conditional construction of Artin representations for real analytic Siegel cusp forms of weight $(2,1)$, to be published in *Contemporary Mathematics*. 2015 (査読有)
- (3) M. Chida, S. Kondo, and T. Yamauchi, On the rational K_2 of a curve of GL_2 type over a global field of positive characteristic. *J.*

K-Theory 14 (2014), no. 2, 313–342. (査読有)

- (4) M. Miyauchi, and T. Yamauchi, An explicit computation of p -stabilized vectors, *Journal de Theorie des Nombres* 26 (2014), 531-558. (査読有)

- (5) M. Miyauchi, and T. Yamauchi, Local newforms and formal exterior square L-functions. *Int. J. Number Theory* 9 (2013), no. 8, 1995–2010. (査読有)

[学会発表] (計 7 件)

- (1) 東北大学整数論セミナー
2015年3月18日(水)
於 東北大学理学研究科合同 A 棟 802 号室
(宮城県仙台市) 山内卓也
The weight in Serre's conjecture for GSp_4

- (2) 金沢大学組合せ数学セミナー
2014年12月1日(月) 金沢大学自然科学(石川県金沢市)研究棟5号館2階232室
山内卓也 : "Cusp forms on E_7 "

- (3) 山内卓也, Artin representations for $\mathrm{GSp}(4)$ attached to real analytic Siegel modular forms. ,
University of Toronto Number Theory / Representation Theory Seminar Academic year 2013-2014 ,
2013年10月(カナダ国トロント市).

- (4) 山内卓也, The L-function of some Siegel modular 3-folds and endoscopic lifts. ,
Seminar at Jussieu in Paris, Monday 17 June 2013 , 2013年6月(フランス国パリ市).

- (5) 山内卓也, Endoscopic lift to the Siegel paramodular threefold related to Klein cubic threefold ,
University of Toronto Number Theory / Representation Theory Seminar Academic year 2012-2013 , 2012年11月(Toronto).
(カナダ国トロント市)

(6)

山内卓也, L-function of some Siegel
threefold of low level: non-neat case ,
Workshop on p-adic arithmetic geometry
and motives ,
2012 年 1 月 (Institute of Mathematics,
Tohoku University, Kawai hall (宮城県仙台
市)).

(7)

山内卓也, 超幾何層に付随する Calabi-Yau
多様体とその応用 , 第 1 4 7 回数理解情報科
学談話会, 2011 年 4 月 鹿児島大学理学部(鹿
児島県鹿児島市).

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山内卓也 (Yamauchi Takuya)
鹿児島大学・教育学部・准教授

研究者番号 : 90432707