

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 7 日現在

機関番号：32660

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2014

課題番号：23740034

研究課題名(和文)L関数と周期の関係及び関連する数論的諸問題

研究課題名(英文)On the relation between L-functions and periods, and the related problems in number theory

研究代表者

加塩 朋和 (Kashio, Tomokazu)

東京理科大学・理工学部・講師

研究者番号：10403106

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：代数体のガロア表現に付属するアルティンのL関数の先頭項の明示式の証明は未解決問題であり、スターク予想と呼ばれている。

本研究の目的は、このスターク予想及び関連する諸問題に対し、"新たな手法"で解決を目指すことであった。すなわち、スターク単数、CM周期、多重ガンマ関数、およびこれらのp進類似を同時に用いる手法である。これまで、これらの概念の一つ一つや、二つの関係性などはよく調べられてきた。近年申請者は、これら全てを同時に扱うことで、有理数体上のスターク予想の別解が与えられることを確かめた。さらに一般化を目指し、いくつかの部分的な結果を得た。これらを論文にまとめ、現在投稿中である。

研究成果の概要(英文)：The Artin L-functions are meromorphic functions associated with Galois representations of number fields. Stark's conjecture states an explicit formula for the leading terms of the Taylor expansions of the Artin L-functions.

The purpose of my research is to study Stark's conjecture by a new method. That is, by using Stark units, CM-periods, the multiple gamma function, and their p-adic analogues simultaneously, we tried to solve this problem. Each of them, or, the relation between two of them has been studied well so far. Recently, we provided an alternative proof of Stark's conjecture when the base field is the rational number field. Moreover we obtained some partial results concerning its generalization and submitted some papers.

研究分野：整数論

キーワード：L関数 周期 p進L関数 p進周期 スターク予想 グロス予想 ガンマ関数 p進ガンマ関数

1. 研究開始当初の背景

様々な L 関数の先頭項の明示式の証明は、数論における中心的命題の一つである。とくに、代数体のガロア表現に付随するアルティンの L 関数に関するものは未解決問題であり、スターク予想と呼ばれている。スターク予想と関連する問題には長らく大きな進展がない状態であったが、研究開始当初には、国内外の研究者 (Dasgupta-Darmon-Pollack, Mazur-Rubin, 吉田敬之, 広瀬稔-佐藤信夫, および報告者等) によっていくつかの成果が上がっていた。いずれも決定的解決には至っていないが、この問題に取り組む上で、新たな手法のアイデアを提供していた。とくに、報告者は吉田氏との共同研究期間中に得られた部分的な結果から、スターク予想を解決するには、 CM 周期と多重ガンマ関数のような古典的な道具だけでなく、これらの p 進類似と呼ばれる新しい道具を、同時に用いることが必要なのではないかと考えていた。

2. 研究の目的

報告者は、本研究の開始前に吉田氏との共同研究を行い、多重ガンマ関数と CM 周期の関係や、その p 進類似の研究を行った。スターク予想の特別な場合は、多重ガンマ関数の特殊値の性質に帰着されることから、この共同研究はスターク予想への応用を含んでいた。とくに後者は、結果的に「スターク予想の p 進類似 = グロス予想」の精密化を与えることとなった。その後報告者は、スターク予想を多重ガンマ関数だけでなく、 CM 周期とその p 進類似という「幾何的な不変量」の性質に帰着することができることを発見した。これらの研究を通して、スターク予想の根本的解決には、 CM モチーフと呼ばれる幾何的対象を含めた新しい理論が必要であることが見えてきた。さらに、スターク予想に対する新しい道具立てとすべく、 $(p$ 進) L 関数と $(p$ 進) CM 周期に関する理論の構築を研究目的としていた。

3. 研究の方法

本研究の特色の一つは、複素数体上の理論 (L 関数の特殊値や微分値、 CM 周期、および多重ガンマ関数等) と、 p 進体上の理論 (p 進 L 関数の微分値、 p 進周期、および p 進多重ガンマ関数等) を並行して用いることにある。複素数体上での研究は、スターク予想や吉田予想などの検証のため、ヘッケの L 関数と呼ばれる解析的関数の微分値と、 CM 型の周期積分と呼ばれる値の比較を行った。これらはすでに良く研究されている対象であり、既存の理論の修得と、計算機による検証に多くの時間を費やした。また、広瀬稔氏と佐藤信夫氏による「ヘッケの L 関数の多変数解釈とその方向微分」に関する理論など、同分野における昨今の発展も、自身の研究に吸収で

きるよう努めた。

一方で p 進体上の理論は現在発展途上であるため、計算等よりむしろ新しい理論の取り込み、または開拓を目指した。具体的には岩澤理論、肥田理論、Darmon-Dasgupta の p 進積分論など、 p 進独特の理論の修得と、自身の研究への取り込みを試みた。

最終的には、複素数体上や p 進体上での結果を元に、諸理論を統合するような理論の完成を目指しているが、その実証例として、諸道具がそろっている「有理数体上のスターク予想」に関し、新しい理論から古典的な結果が復元できるかを確かめた。

さらに、スターク予想に関する自他の研究成果を確認する意味も込めて、平成 24 年度には「スターク予想」をテーマとして、研究集会「第 20 回整数論サマースクール」を企画した。

4. 研究成果

本研究のテーマは「 L 関数と周期の関係及び関連する数論的諸問題」であり、これは L 関数の特殊値 (または微分値) と、周期と呼ばれる数論的な不変量との関係を明らかにすることを目的としている。報告者は平成 22 年度までに吉田敬之氏と共同研究を行い、スターク予想やその p 進類似であるグロス予想の部分的解決、および問題の精密化を行ってきた。この研究を通して、問題の根本的解決には CM モチーフと呼ばれる幾何的対象に関する理論が必要であると考えていた。今回の研究期間における研究成果は下記の通りである。

(1) CM モチーフの簡単な場合は「フェルマー曲線」と呼ばれる代数曲線で表すことができる。このフェルマー曲線上の計算により、円単数やガウス和と言った数論において基本的な不変量の性質を導けることを発見した。この結果、基礎体が有理数体の場合のスターク予想の部分的な別証明を与えることができた。スターク予想は、基礎体が有理数体の場合には、いくつかの特殊関数の間の関数等式と、円単数の性質に帰着できることが知られている。しかしこの解法は、有理数体上での限定的なものであり、一般の総実体への拡張が存在していない。一方で、今回用いたフェルマー曲線上での理論 (Rohrlich, Coleman による) は、その一般化が、予想式の形ではあるが与えられている (吉田敬之および報告者)。今回与えた結果は、もともとのスターク予想より弱いものであったが、今後の一般化を期待できるという点で、意義のある結果であると考えている。

証明のポイントは CM 周期、 p 進 CM 周期、ガンマ関数、 p 進ガンマ関数を同時に扱うことで、これまでにはない良い性質をもつ不変量 (論文中では、 p 進周期環に値をとるベータ関数と名付けている) を定義できたことに

ある。この結果は複数の研究集会で発表し、現在、論文を投稿中である。

(2) 新谷公式および吉田敬之氏の「 X -不変量」の理論により、総実体上のスターク単数は自然に「総実体の次数」個の不変量の積へと分解できる。報告者は、これらのうち「総実体の次数-1」個の不変量に対して代数性を示せることを発見した。結果として、スターク単数の代数性は、残りの一個の不変量の代数性に帰着できる。この結果は以下の応用を含んでいる。吉田氏は任意の「志村氏の周期記号」の超越数部分を、吉田氏の「 X -不変量」を用いて表す明示式を予想した。この式を逆に解くためには「 X -不変量」の間の非自明な関係式を必要としていたが、今回の結果がその非自明な関係式を与えている。結果的に吉田氏の予想式は「スターク単数の代数性」「志村氏のCM周期の単項関係式」及び「多重ガンマ関数の単項関係式」の三つが対応していることを示唆している。一方でドリーニュ予想により、志村氏の定義したCM周期は代数的ヘッケ指標に付随するモチーフのドラム同型の行列係数として言い換えられ、CM周期の単項関係式は、CMモチーフの幾何的性質に言い換えられる。将来的には、スターク単数の代数性（さらにはその他の性質まで）が、CMモチーフの幾何的性質に帰着されることが期待できる。これらの結果は現在プレプリントにまとめている。

(3) スターク予想とその一般化をテーマとした研究集会「第20回整数論サマースクール・スターク予想」を企画し、開催した。またその場において、一講演者としてスターク予想の概説と、自身の研究成果を発表した。また、これらの結果を報告集として出版した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

Tomokazu Kashio, A survey on Stark's conjectures and a result of Dasgupta-Darmon-Pollack, RIMS Kokyuroku Bessatsu B51: Algebraic Number Theory and Related Topics 2012, 査読有, 229-268. 2014 年.

加塩 朋和, Stark-Tate の定式化, 有理数体上の Stark 予想の証明, Rubin's integral refinement, 第20回整数論サマースクール「スターク予想」報告集, 査読無, pp1-26, 93-104, 2013 年.
<http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/ha/SS2012/index.html>

Tomokazu Kashio, On a relation

between p-adic Multiple gamma functions and p-adic periods, RIMS Kokyuroku Bessatsu B25: Algebraic Number Theory and Related Topics 2009, 査読有, pp31-51, 2011 年.
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu/open/B25/B25.html>

[学会発表](計 12 件)

加塩 朋和, 2014 年 12 月 4 日, 有理数体上の Stark 予想とフェルマー曲線の CM 周期, Algebraic Number Theory and Related Topics, 京都大学(京都府・京都市)

Tomokazu Kashio, 2014 年 9 月 4 日, A product of special values of multiple gamma functions, Japan-Taiwan Joint Conference on Number Theory, 休暇村気仙沼大島(宮城県気仙沼市)

加塩 朋和, 2013 年 10 月 18 日, 有理数体上の Stark 予想の部分的な別証明, 早稲田大学整数論セミナー, 早稲田大学(東京都・新宿区)

Tomokazu Kashio, 2013 年 4 月 26 日, On Shimura's CM-periods and Stark's units over totally real fields, Automorphic Functions and Arithmetic Geometry: a symposium for Prof. L. Lafforgue's visit, 九州大学伊都キャンパス(福岡県・西区)

加塩 朋和, 2012 年 12 月 19 日~12 月 20 日, CM 周期に関する吉田予想とその p 進類似について, 北大数論幾何セミナー, 北海道大学(北海道・札幌市)

加塩 朋和, 2012 年 12 月 3 日, A survey on Stark's conjectures and a result of Dasgupta-Darmon-Pollack, Algebraic Number Theory and Related Topics, 京都大学(京都府・京都市)

加塩 朋和, 2012 年 9 月 2 日~9 月 5 日, Stark-Tate の定式化, 有理数体上の Stark 予想の証明, Rubin's integral refinement, 整数論サマースクール「スターク予想」, 国民休暇村(熊本県・阿蘇郡)

Tomokazu Kashio, 2012 年 6 月 2 日, Frobenius actions on Fermat curves and cyclotomic units, Symposium on Arithmetic & Geometry, 九州大学伊都キャンパス(福岡県・西区)

加塩 朋和, 2012 年 3 月 14 日~3 月 16 日, Stark-Tate の定式化と Rubin の integral refinement, スターク予想に関する小研究会, 金沢大学サテライトプラザ(石川県・金

沢市)

加塩朋和, 2011年11月26日, 有理数体上のスターク予想の別証明, 岩澤理論セミナー, 慶應義塾大学理工学部(神奈川県・横浜市)

Tomokazu Kashio, 2011年4月21日, On a relation between p-adic gamma functions and p-adic periods, Workshop on L-Functions, 九州大学伊都キャンパス(福岡県・西区)

Tomokazu Kashio, 2011年4月10日, On a relation between p-adic gamma functions and p-adic periods, Mini-workshop on Iwasawa theory, 京都大学(京都府・京都市)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

〔その他〕

2012年度整数論サマースクール「Stark 予想」を開催し、その報告集を刊行した。

<http://www.ma.noda.tus.ac.jp/u/ha/SS2012/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

加塩 朋和 (KASHIO, Tomokazu)
東京理科大学・理工学部・講師
研究者番号: 10403106

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし