

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 25 日現在

機関番号：34411

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23740036

研究課題名(和文)多重高次Mahler測度の数論的および幾何学的解釈の研究

研究課題名(英文)Research on arithmetic and geometric properties of multiple higher Mahler measures

研究代表者

佐々木 義卓(SASAKI, YOSHITAKA)

大阪体育大学・体育学部・講師

研究者番号：20548771

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円、(間接経費) 540,000円

研究成果の概要(和文)：多重ポリログ関数の性質を応用することで、多重L値やDirichlet L関数の特殊値と多重高次Mahler測度の関係を新たに解明した。また、多重Mahler測度の母関数であるゼータMahler測度と多重ゼータ関数の母関数の関係から、多重高次Mahler測度と多重ゼータ値の線形関係や多重高次Mahler測度の明示公式を示した。荒川・金子のゼータ関数の構成法をもとにDirichlet L関数を拡張し、多重L値と関係する新たなL関数を構成するとともに、そのL関数の諸性質を解明した。また、このL関数の特殊値を通して多重Euler数を導入し、その数論的性質や組合せ論的解釈を新たに発見した。

研究成果の概要(英文)：We showed relations between multiple L values and multiple higher Mahler measures by applying algebraic properties of multiple polylogarithms. From the view point of the generating function of multiple higher Mahler measure (zeta Mahler measure), we also found linear relations between multiple zeta values and multiple higher Mahler measures, and explicit formulas of multiple higher Mahler measures

We generalized Dirichlet L-functions based on the construction of Arakawa-Kaneko's zeta function and showed the relation between such generalized L-functions and multiple L values. We introduced poly-Euler numbers via special values of such generalized L-function, and investigated some properties of poly-Euler numbers. In particular, we obtained number theoretic properties and combinatorial interpretations of poly-Euler numbers.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：Mahler測度 L関数 ゼータMahler測度 ポリログ関数 多重ゼータ値 多重L値

1. 研究開始当初の背景

Mahler 測度は複素数係数 Laurent 多項式の対数を単位円周上で積分して定まる数であり、L 関数の特殊値との関係や周期的解釈、幾何学的解釈など多くの数学的意味を持つ重要な研究対象である。Mahler 測度と L 関数の特殊値との関係は、1981 年、Smyth により、導手 3 の Dirichlet 指標に付随する L 関数の特殊値との関係が初めて発見され、現在では様々なゼータ関数、L 関数の特殊値との関係が解明されている。Chinburg により Smyth の結果の拡張・一般化に関する予想が提起され、これまでに Ray、Boyd-Rodriguez-Villegas 等により Chinburg の予想に対する解答が多数与えられている。さらに最近では、黒川・Lalin・落合により Mahler 測度の拡張として多重高次 Mahler 測度導入され、多重高次 Mahler 測度と多重ゼータ値の関係が解明されている。この研究結果より、多重高次 Mahler 測度も Mahler 測度と同様にゼータ関数、L 関数の特殊値と密接に関係することが期待される。特に、Chinburg の予想との対応から、多重高次 Mahler 測度と多重 L 値の関係が期待される。さらに、Mahler 測度と同様、多重高次 Mahler 測度も幾何学的解釈や周期的解釈など様々な性質を持つことも期待される。多重高次 Mahler 測度は導入されてまだ間もない研究対象であるが、興味深い性質がいくつか発見されており、その性質を逸早く解明する必要がある。本研究では、多重ポリログ関数の代数的構造や多重高次 Mahler 測度の母関数を応用し、多重高次 Mahler 測度と多重ゼータ値、多重 L 値との関係や多重高次 Mahler 測度の線形関係など、多重高次 Mahler 測度の諸性質解明を目指す。

2. 研究の目的

近年導入された多重高次 Mahler 測度の諸性質解明を目的とする。これまでに得られている多重高次 Mahler 測度の情報は、黒川・Lalin・落合の初動研究によるものであり、全体的な情報はまだ不足している状況と言える。とはいえ、黒川・Lalin・落合により、多重高次 Mahler 測度と多重ゼータ値の関係が解明されたことで、Mahler 測度の L 関数の特殊値との関係に関する性質が多重高次 Mahler 測度に対しても拡張されることが期待される。本研究では、主に多重高次 Mahler 測度と多重ゼータ値、多重 L 値の関係を徹底解明し、Mahler 測度と L 関数の特殊値の関係に関する Chinburg の予想がどのように拡張されるのか追及していく。さらには、多重高次 Mahler 測度と多重ゼータ値、多重 L 値の関係に関する情報をもとに、多重高次 Mahler 測度の幾何学的解釈、周期的解釈など、多重高次 Mahler 測度の新たな性質を解明していく。

(1) 多重高次 Mahler 測度と多重 L 値の関係解明：黒川・Lalin・落合により、多重高次

Mahler 測度と多重ゼータ値の関係が発見されたことから、Mahler 測度と L 関数の特殊値の拡張として、多重高次 Mahler 測度と多重 L 値の関係が予想される。その関係を解明するために、多重高次 Mahler 測度の被積分関数と多重ポリログ関数との関係を徹底的に解析していく必要がある。

(2) ゼータ Mahler 測度による多重高次 Mahler 測度の解析：多重高次 Mahler 測度と Mahler 測度は母関数を用いると総合的に扱うことができる。Mahler 測度を持つ諸性質が多重高次 Mahler 測度においてどのように拡張されるのかを調査するには、このゼータ Mahler 測度を通して考えるのが自然である。特に、ゼータ Mahler 測度と関係する関数や関数としての性質について、多くの情報を収集する必要がある。

(3) 拡張された L 関数による多重 L 値の解析：Mahler 測度と多重 L 値の関係解明には、多重 L 値自体の情報が重要な役割を担う。荒川・金子のゼータ関数の構成法を Dirichlet L 関数に適用することで、多重 L 値と密接に関係する新たな L 関数が導入できる。多重 L 値の新たな性質を解明するために、この L 関数の諸性質を解明しなければならない。

3. 研究の方法

(1) 多重高次 Mahler 測度と多重ゼータ値、多重 L 値の関係解明：黒川・Lalin・落合の初動研究で計算された多重高次 Mahler 測度の被積分関数には多重ポリログ関数が現れている。特に、多重高次 Mahler 測度と多重ゼータ値の関係を与えた研究においては、多重ポリログ関数の代数的構造が重要な役割を担っていた。このことから、多重高次 Mahler 測度と多重ポリログ関数の関係について詳しく解析を行うとともに、多重ポリログ関数の代数的構造を応用することで、多重 Mahler 測度と多重ゼータ値、多重 L 値との関係を構造的に解明していく。

(2) ゼータ Mahler 測度による多重高次 Mahler 測度の解析：黒川・Lalin・落合によって与えられた多重高次 Mahler 測度と多重ゼータ値の関係式の多重ゼータ値側に着目すると、多重ゼータ値の母関数に現れるものと類似していることが読み取れる。すなわち、Mahler 測度の母関数であるゼータ Mahler 測度と多重ゼータ値の母関数が関係していることを示唆するものと言える。このように母関数間から多重高次 Mahler 測度の新たな性質を容易に解明できる可能性がある。多重高次 Mahler 測度と同様、ゼータ Mahler 測度も導入されて間もないため、様々な多項式のゼータ Mahler 測度を計算し、どのような関数と関係が強いのか、どのような性質を持つかなど、ゼータ Mahler 測度の情報を多数収集し、母関数の関係から多重高次 Mahler

測度の諸性質を解明していく。特に、Mahler 測度が有する多様な性質が多重高次 Mahler 測度に対してどのように拡張されるのかなど、多重高次 Mahler 測度の総合的な性質の解明を図る。

(3) 拡張された L 関数による多重 L 値の解析：荒川・金子のゼータ関数の構成法を Dirichlet L 関数に適用することで得られる L 関数は多重 L 関数と密接に関係する関数になる。その拡張された L 関数の諸性質を解明し、特殊値の明示公式や多重 L 関数の関数関係式を導くことで、多重 L 値の新たな性質の解明を図る。

4. 研究成果

(1) 黒川・Lalin・落合による先行研究では扱われていない様々な多項式に対して多重高次 Mahler 測度を計算することで、多重ポリログ関数と多重高次 Mahler 測度の関係に関する詳細な情報を得た。特に円周当分多項式を適切に組み合わせた多重高次 Mahler 測度は、多重ポリログ関数と密接に関係することを示す結果を得た。また、その一部は多重高次 Mahler 測度と多重 L 値の関係を与えることも示した。一方で、黒川・Lalin・落合によって示された多重高次 Mahler 測度とダイログ関数の関係に着目することで、多重高次 Mahler 測度と Dirichlet L 関数の特殊値の関係を解明した。さらに、報告者の先行研究での技法を応用することで、多重高次 Mahler 測度とポリログ関数の関係も新たに示すことができた。

(2) 赤塚や黒川・Lalin・落合によるゼータ Mahler 測度の研究結果をもとに、母関数に応用した多重高次 Mahler 測度と多重ゼータ値、多重 L 値の関係を解明した。多重ゼータ値の母関数は超幾何関数であり、そのパラメータを特殊化すると様々な関数と関係する。その特性を活かし、既に得られているゼータ Mahler 測度と超幾何関数の特殊化の比較を行った。特に多重ゼータ値と関係する多重高次 Mahler 測度の母関数は、超幾何関数の特殊化と一致する例が多数存在し、その関係をもとに、多重高次 Mahler 測度と多重ゼータ値の線形関係式を容易に解明することができた。また、ゼータ Mahler 測度の特殊化も効果的で、ある多項式の多重高次 Mahler 測度のゼータ Mahler 測度は、一見すると扱いにくいものであるが、特殊化すると Euler 数の母関数と一致することを発見し、その多重高次 Mahler 測度の Euler 数を用いた明示公式を与えた。さらに、この研究結果と黒川・Lalin・落合の結果を組み合わせることで、多重高次 Mahler 測度の線形関係式を得た。

(3) 荒川・金子のゼータ関数の拡張法を応用して、Dirichlet L 関数をポリログ関数を用いて拡張し、その L 関数と多重 L 関数の関

係を示した。また、この L 関数と多重 Hurwitz ゼータ関数の関係も解明できた。これらの関係を組み合わせることで、多重 L 値と多重 Hurwitz ゼータ値の関係を導いた。拡張された L 関数の様々な特殊値の計算も行った。この L 関数の特殊値で多重 Euler 数を導入し、数値実験をもとに興味深い性質を見出し、実際に証明を与えた。その結果、多重 Euler 数の整数論的性質や組合せ論的性質など、新しい性質を多数解明した。この研究結果については国内外の様々な研究集会で講演し、好評を得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 11 件)

佐々木 義卓、大野 泰生、多重 Euler 数とその L 関数、Proceedings of Algebra and Computation 2013、査読無、2013、23-36.

大野 泰生、佐々木 義卓、Periodicity on poly-Euler numbers and Vandiver-type congruence for Euler numbers、RIMS Kōkyūroku Bessatsu、査読有、B44、2013、205-212

佐々木 義卓、多重 Euler 数、研究集会「特異点と多様体の幾何学 2012」報告集、査読無、2012、160-169

大野 泰生、佐々木 義卓、On the parity of poly-Euler numbers、RIMS Kōkyūroku Bessatsu、査読有、B32、2012、271-278

佐々木 義卓、On multiple higher Mahler measures and Witten zeta values associated with semisimple Lie algebras、Communications in Number Theory and Physics、査読有、Vol.6、2012、771-784

佐々木 義卓、Quantum Computing and Number Theory、in Kinki University Series on Quantum Computing、査読無、Vol. 6、2012、67-84

Wim van Dam、佐々木 義卓、Quantum algorithms for problems in number theory, algebraic geometry, and group theory、in Kinki University Series on Quantum Computing、査読無、Vol. 5、2012、79-106

大野 泰生、佐々木 義卓、山崎 知佳、On 3-variable exponential polynomials and quantum algorithms、in Kinki University Series on Quantum Computing、査読無、Vol. 4、2012、211-223

佐々木 義卓、On generalized poly-Bernoulli numbers and related L-functions、Journal of Number Theory、査読有、Vol.132、2012、156-170

佐々木 義卓、多重 Euler 数の諸性質およ

び組合せ論的解釈について、第5回多重ゼータ研究集会「多重ゼータとその周辺」報告集、査読無、2012、101-107
佐々木 義卓、Multiple zeta values and zeta Mahler measures、数理解析研究所講義録、査読無、Vol.1806、2012、37-41

[学会発表](計13件)

大野 泰生、佐々木 義卓、多重 Euler 数の諸性質について、第10回「代数学と計算」研究集会(AC2013)、首都大学東京、2013年12月18日

佐々木 義卓、On poly-Euler numbers and the related L-function、Analysis and Number Theory seminar、University of Newcastle (Australia)、2013年3月4日

佐々木 義卓、多重 Euler 数の諸性質と付随する L 関数について、研究集会「特異点と多様体の幾何学」、山形大学、2012年8月26日

佐々木 義卓、ゼータ Mahler 測度と多重ゼータ値の母関数、日本数学会2012年度年会、東京理科大学、2012年3月29日

佐々木 義卓、多重 Euler 数の数論的性質および組合せ論的解釈について、第5回多重ゼータ研究集会「多重ゼータとその周辺」、九州大学、2012年1月29日

佐々木 義卓、Number theoretic and combinatorial properties of poly-Euler numbers、Algebraic Number Theory and Related Topics、京都大学数理解析研究所、2011年12月7日

佐々木 義卓、Number theoretic and combinatorial properties of poly-Euler numbers、近畿大学数学教室談話会、近畿大学、2011年11月10日

佐々木 義卓、Multiple zeta values and zeta Mahler measures、Analytic Number Theory-related Multiple aspects of Arithmetic Functions、京都大学数理解析研究所、2011年10月31日

佐々木 義卓、On poly-Euler numbers and related L-function、Quebec-Vermont Number Theory Seminar、Concordia University (Canada)、2011年10月20日

佐々木 義卓、多重ゼータ値の母関数とゼータ Mahler 測度について、解析数論セミナー、名古屋大学、2011年10月6日

大野 泰生、佐々木 義卓、多重 Euler 数の数論的性質、日本数学会2011年度秋季総合分科会、信州大学、2011年10月1日

佐々木 義卓、Mahler 測度と L 関数の特殊値およびその多重化について、今野・梶原研セミナー、横浜国立大学、2011年7月5日

佐々木 義卓、Mahler 測度と L 関数の特殊値について、関西多重ゼータ研究集会、

近畿大学、2011年6月18日

[その他]

ホームページ:

<https://sites.google.com/site/yoshitaku-sasaki/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

佐々木 義卓 (SASAKI, Yoshitaka)

大阪体育大学・体育学部・講師

研究者番号: 20548771

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし