

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 19 日現在

機関番号：15201

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2011～2013

課題番号：23740040

研究課題名(和文) グラフ複体に関連する位相幾何学

研究課題名(英文) Topology related to graph complex

研究代表者

渡邊 忠之 (Watanabe, Tadayuki)

島根大学・総合理工学研究科(研究院)・講師

研究者番号：70467447

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円、(間接経費) 540,000円

研究成果の概要(和文)：円周上の閉曲面束である閉3次元多様体Mの「アミダくじ的パス」というものを考案し、MのZ同変不変量の構成に応用した。アミダくじ的パスとは、M内のある種の区分的に滑らかな経路であり、曲面束の射影に関する勾配ベクトル場における積分曲線の近似と見なせる。深谷賢治氏のMorseホモトピー理論の類似で、各辺がアミダくじ的パスであるようなM内の3価グラフを数えることにより、MのZ同変不変量の候補を得た。

研究成果の概要(英文)：We introduced the notion of "amidakuji-like path" in a closed 3-manifold M that is a surface bundle over the circle and applied it to the construction of a Z-equivariant invariant of M. An amidakuji-like path is a piecewise smooth path in M and can be considered as an approximation of an integral curve for the gradient vector field of the projection of the surface bundle. As an analogue of Kenji Fukaya's Morse homotopy theory, we obtained a candidate for a Z-equivariant invariant by counting 3-valent graphs in M whose edges are amidakuji-like paths.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：Morse-Novikov理論 Morse理論 Chern-Simons摂動理論 グラフ複体 3次元多様体 微分同相群 曲面束

1. 研究開始当初の背景

- (1) ホモロジー3 球面に対する普遍有限型不変量として、M. Kontsevich, G. Kuperberg, D. Thurston による配置空間積分の不変量と、T. Le, 村上順, 大槻知忠による LMO 不変量の二つが知られていた。大槻氏はさらに、LMO 不変量を改良し、1 次ベッチ数が1 の閉3 次元多様体に対する Z 同変不変量を、ある具体的に記述されたグラフの空間に値を持つものとして定義し、それが従来の不変量と比べて大幅に強力であることを示していた。その後、C. Lescop は1 次ベッチ数が1 の閉3 次元多様体の配置空間を使った位相的な方法により、2 ループグラフの Z 同変不変量を構成した。本研究では、これらの Z 同変不変量をさらに理解し、発展させることを目指した。
- (2) また、高次元球面の微分同相群の非安定域における有理ホモトピー群の構造はほとんど知られていなかった。高次元球面の微分同相群の1 次有理ホモトピー群の決定のために、Morse 軌道空間から決まる図式によって表される元からなる部分群の構造および高次元埋め込みの空間の有理ホモトピー群を決定することを目指した。

2. 研究の目的

- (1) 筆者は、Morse ホモトピー理論を使った3 次元多様体の不変量の構成(深谷賢治による)を、ホモロジー球面と自明接続の場合に、一般次数の3 価グラフサイクルに対して拡張していた。(最近、清水達郎によって、筆者の不変量が Kontsevich-Kuperberg-Thurston の不変量と一致するという筆者の予想が肯定的に解決された。)本研究では、Morse ホモトピー理論の方法を、正の1 次ベッチ数を持つ3 次元多様体に対して適用し、Lescop の同変不変量との関係を明らかにしながら、新たな不変量を構成することを目的とした。
- (2) 筆者は、5 次元球面の微分同相群の1 次有理ホモトピー群において、Morse 軌道空間から決まる図式の群と Z に値を持つ障害類が全て消えているような元は、2 次元球面の非交和の5 次元ユークリッド空間への枠付き埋め込みの空間の2 次有理ホモトピー群の元から、手術を行うことによって実現できることを示していた。本研究では、図式によって表される元からなる部分群の構造と、枠付き埋め込みの空間の2 次有理ホモトピー群の構造を

決定することにより、5 次元球面の微分同相群の1 次有理ホモトピー群の構造を明らかにすることを目的とした。

3. 研究の方法

Kontsevich-Kuperberg-Thurston の構成では、ホモロジー3 球面の2 点配置空間の Fulton-MacPherson 型コンパクト化において、境界上で標準的な形をした特別な閉2 形式(プロパゲーター)が存在することが重要であった。プロパゲーターのポアンカレ双対は相対4 サイクルである。一方、Morse ホモトピーの不変量の構成では、Morse 関数の勾配ベクトル場における2 点間の積分曲線のモジュライ空間のコンパクト化によって与えられる、2 点配置空間内の4 チェインを考える。(清水氏によると、これがプロパゲーターのポアンカレ双対の一部となる。)1 次ホモロジーが自明であることがプロパゲーターの存在のための条件であるため、3 次元多様体の1 次ベッチ数が正の場合には、以上の方法をそのまま適用することはできない。本研究では、Morse 関数の代わりに円周に値を持つ Morse 関数の勾配ベクトル場における2 点間の積分曲線のモジュライ空間(コンパクトでない)を考え、これを使って well-defined な不変量を得ようとした。

4. 研究成果

- (1) 円周上の曲面束である閉3 次元多様体 M (この場合、射影が、非特異な円周値 Morse 関数となる)において、「アミダくじのパス」というものを考え、それらのモジュライ空間によって、 M の2 点配置空間の、有理関数体を係数とするねじれ相対ホモロジーの4 次のクラスを具体的に与えた。このクラスに属する4 チェインで、境界上で標準的な形をしたもの(同変プロパゲーター)の存在が Lescop によって示されていたが、筆者のモジュライ空間が、同変プロパゲーターをある意味で具体的に与えていることを証明した。この成果については、Kavli IPMU で開催された研究集会 Floer and Novikov homology, contact topology and related topics やセミナー等で講演し、論文(プレプリント)にまとめた。本研究の期間中に出版された論文はないが、本研究にかかわるプレプリントが2 編あり、準備中の論文が1 編ある。この成果により、ベッチ数が正の3 次元多様体に対する新たな普遍摂動的な不変量の発見や、配置空間のねじれホモロジーの研究にも応用が期待される。

- (2) 5次元球面の微分同相群の有理ホモトピー群については、(1)で予想外の進展があり、それに集中したこともあり、こちらが計画通りに運ばなかったことは残念である。しかし筆者は、いずれ2つのテーマを統一するという構想をもっているため、微分同相群の有理ホモトピー群の決定は、今後の重要な課題である。本研究では、研究協力者の境主一と共に、埋め込みの空間の非安定域におけるホモトピー群の研究を行い、2ループグラフサイクルに対応する、埋め込みの空間上のコサイクルを構成し、ホモトピー群で対応する部分の非自明性に関する予想を得た。埋め込みの空間のホモトピー群については、今後境氏と共に、Goodwillie-Weissの関手微積分をより深く理解し、非安定域の埋め込みの空間の有理ホモトピー群を決定することを目指す。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計0件)

[学会発表](計11件)

渡邊忠之, Morse theory and Lescop's equivariant propagator, Floer and Novikov homology, contact topology and related topics, 2014年4月22日, Kavli IPMU

渡邊忠之, Morse理論と3次元多様体の不変量, 日本数学会秋季分科会特別講演, 2013年9月24日, 愛媛大学

渡邊忠之, Morse theory and invariants of manifolds, The 6th Pacific rim conference on mathematics, 2013年7月2日, 札幌コンベンションセンター

渡邊忠之, Higher-order generalization of Fukaya's Morse homotopy invariant of 3-manifolds, トポロジー火曜セミナー, 2013年6月25日, 東京大学数理科学研究科

渡邊忠之, モース理論と3次元多様体の不変量, 松江セミナー, 2013年5月29日, 島根大学総合理工学部

渡邊忠之, Invariants of 3-manifolds via Morse homotopy, Topology seminar,

2013年3月8日, Institut Fourier, Grenoble

渡邊忠之, S^1 -valued Morse関数のNovikov複体のホモトピー, 幾何学コロキウム, 2013年2月22日, 北海道大学理学部

渡邊忠之, Invariants of 3-manifolds via Morse homotopy, HU and SNU symposium, 2012年12月7日, 北海道大学

渡邊忠之, Higher-order generalization of Fukaya's Morse homotopy invariant of 3-manifolds, Studio Phones Seminar, 2012年2月9日, 神戸大学

渡邊忠之, Higher-order generalization of Fukaya's Morse homotopy invariant of 3-manifolds, 信州トポロジーセミナー, 2012年1月20日, 信州大学理学部

渡邊忠之, Obstructions for π_1 of the space of pseudo-isotopies of disks in non-stable range, East Asian Conference on Algebraic Topology, 2011年12月9日, 東京大学数理科学研究科

[図書](計0件)

[産業財産権]
出願状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]
ホームページ等
<http://www.math.shimane-u.ac.jp/~tadayuki/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

渡邊 忠之 (WATANABE TADAYUKI)
島根大学・総合理工学研究科・講師
研究者番号：70467447

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：