様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 ９ 日現在

機関番号：１０１０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2014
課題番号：２３７４００４２
研究課題名（和文）ループ群の複素化と実形による定曲率空間の曲面の構成

研究課題名（英文）Construction of surfaces via complexifications of loop groups

研究代表者
小林　真平（KOBAYASHI, Shimpei）

北海道大学・理学（系）研究科（研究院）・准教授

研究者番号：４０４０８６５４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,000,000円

研究成果の概要（和文）：曲面の構造方程式が可積分系で記述される可積分曲面の構成および特徴付けを行った．特に可積分曲面が持つループ群の構造を用いて，三次元ハイゼンベルグ内の極小曲面の構成法，三次元球面内のガウス曲率一定曲面（ただしK<1）の特徴付けと構成法，および三次元実射影空間内のデモラン曲面の可積分系としての特徴付けを得た． また，ループ群の作用を用いて離散mKdV方程式の新しい導出も得た．

研究成果の概要（英文）： When the structure equations (nonlinear partial differential equations) of a surface is an integrable system, the surface is called "integrable surface". In the research, we gave constructions and characterizations of integrable surfaces. In particular, using loop group structures of integrable surfaces, we gave a construction of minimal surfaces in the three-dimensional Heisenberg group, constant Gaussian curvature surfaces in the three-sphere and a characterization of Demoulin surfaces in the three-dimensional real projective space. Moreover, we gave a new method obtaining the discrete mKdV equation using a loop group action.

研究分野： 幾何学

キーワード： 停留曲面　ループ群　可積分系

１．研究開始当初の背景

古典微分幾何に現れる種々の曲面（極小曲面やガウス曲率一定曲面）の研究は，1960 年代に始まった可積分系（“可解な”微分方程式の総称）の方法の応用により，1990 年代から飛躍的に深化した．特に，U. Pinkall と I. Sterling による３次元ユークリッド空間内の平均曲率一定輪環面の可積分系による特徴付けにより，可積分系の理論の曲面論への応用の有効性がはっきりと明らかになった．その後，1998 年に J. F. Dorfmeister, F. Pedit および H. Wu によって，対称空間への調和写像の無限次元リー群（ループ群）の分解定理を用いた Weierstrass 型の表現公式が発見され，可積分系の理論の曲面論及び微分幾何学の応用はさらに広がっていった．

本研究課題の研究代表者は，ループ群を用いた曲面の構成法（Weierstrass 型の表現公式）およびそれを用いた曲面の構成等を行ってきた．特に，ループ群の複素化とその実形を用いて，これまで個別に研究されてきた Weierstrass 型の表現公式を統一的に記述，理解する方法を与えた．これは主に三次元ユークリッド空間およびミンコフスキー空間内（平坦な空間）の平均曲率一定曲面やガウス曲率一定曲面についての結果である．

しかしながら一方，古典微分幾何に現れる特殊な曲面は，ユークリッド空間やミンコフスキー空間等の平坦な空間内だけに存在するとは限らない．例えばアフィン球面と呼ばれる曲面は，G. Tzitzeica によって発見されたが，これは三次元アフィン空間内の曲面である．さらにこのアフィン球面の構造方程式は可積分系であることが知られている．

２．研究の目的

可積分系の理論を用いた曲面の構成法や変換の理論を研究する事は基本的な問題である．本研究課題では，ユークリッド変換群より大きい群が作用する幾何学における停留曲面に対して，Weierstrass 型の表現公式による構成法，曲面の構成および曲面の性質を解明する事を研究目的とした．

３．研究の方法

さまざまな空間内の種々の曲面（主ににある汎関数の停留点となる曲面）が持つループ群の構造を用いた定式化を研究の端緒にした．特に，動標構の一径数族を構成し，その両立条件として曲面の構造方程式を導出する事を試みた．また，ループ群の作用を用いて曲面の構造方程式を導出する事も試みた．研究の指針となったものは，常に可積分曲面のループ群の構造であった．

４．研究成果

（１）可積分系の方程式は，その一つの著しい特徴として，対応する差分方程式の存在があげられる．差分化された微分方程式は対応する滑らかな方程式の単なる近似方程式ではなく，滑らかな場合の微分方程式のさまざまな種類の解（ソリトン解やテータ関数解）の構造を保存している事が知られている．本研究課題では，滑らかな可積分系に対応する差分方程式を直接研究する予定ではなかったが，ループ群の作用による曲面の構成を研究する中で，既存の差分方程式としてよく知られていた離散 mKdV 方程式を新しく導出する方法を発見した．mKdV 方程式を導出する方法は，それまでに広田の定式化によるものと，適当な線形差分方程式系の両立条件とし導くという二種類が存在していた．本研究では後者とは異なる線形差分方程式系をループ群の作用から導きだした所が新しい．特に，ループ群の作用の観点から離散 mKdV 方程式を導出できたことは意義があった．

（２）研究代表者はループ群の複素化と実形を用いてユークリッド空間とミンコフスキー空間の平均曲率一定曲面及びガウス曲率一定曲面に対する Weierstrass 型の表現公式の導出および統一的解釈を得ていた．本研究では三次元球面内のガウス曲率一定曲面（$K<1$）に対して，適切なガウス写像による曲面の特徴付け，Weierstrass 型の表現公式および具体例の構成を行った．特にこのガウス写像が対称空間としての球面へのローレンツ調和写像である事とガウス曲率が一定（$K<1$）である事が必要十分条件であり，この事からガウス曲率一定曲面の動標構に自然に一径数族を定める．この事を用いてループ群の構造を導入する事ができ，Weierstrass 型の表現公式が導出できた．

（３）さらに研究を続ける中で，ユークリッド変換群より大きい群が作用するのではなく，小さい群が作用する空間内の曲面に対してもループ群の構造を持つものがある事に気づいた．特に，三次元のハイゼンベルグ群は典型的な例であり，この空間の等長群の次元は 4 次元であり，6 次元であるユークリッド変換群より小さい．一般的に，可積分系で記述される曲面は，空間に十分に高い対称性が要請される事が多い．従って，ハイゼンベルグ群の曲面に対してループ群の手法が適用できるとは一見しては思えない．しかしながら，曲面の Dirac 作用素とスピン構造を用いた定式化（I. Taimanov らによる）を深化させる事によって，ハイゼンベルグ群の極小曲面がループ群による定式化を持つ事を示した．特に，曲面のガウス写像が双曲平面への調和写像である事と曲面が極小である事が同値であることを用いて Weierstrsass 型の表現公式を導く事ができた．

（4）大きい群が作用する空間として，三次元の実射影空間が知られている（作用する群は4次の特殊線形群 SL(4,R)である）．この中の停留曲面としては射影極小曲面というものがよく知られており，さらに射影極小曲面の中に Demoulin 曲面と呼ばれる特別な性質を持つ曲面が存在する．Demoulin 曲面は，古典微分幾何では，曲面の変換によって特徴付けられる事が知られている．本研究では，三次元の実射影空間の曲面に対して，良いガウス写像を定義して，このガウス写像を用いて Demoulin 曲面の特徴付けを与えた．このガウス写像を用いた特徴付けの背後には，ループ群の構造が重要であった．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計４件）

1．Josef F. Dorfmeister, Junichi Inoguchi, Shimpei Kobayashi, A loop group method for minimal surfaces in the three-dimensional Heisenberg group, Asian Journal of Mathematics 印刷中，査読有

2．Shimpei Kobayashi, A loop group method for projective minimal and Demoulin surfaces in the 3-dimensional real projective space, Differential Geometry and its Applications 40(2015), 57--66, 査読有, doi:10.1016/j.difgeo.2015.02.005

3．David Brander, Junichi Inoguchi, Shimpei Kobayashi, Constant Gaussian curvature surfaces in the 3-sphere via loop groups, Pacific Journal of Mathematics, 269 (2014), no. 2, 281--303, 査読有 DOI:10.2140/pjm.2014.269.281

4．Shimpei Kobayashi, Discretization of integrable systems via dressing actions, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B41(2013), 148-161, 査読有

〔学会発表〕（計 17 件）

1．小林 真平，離散可積分曲面論入門，離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル 2014；九州大学（福岡県・福岡市）;2 月 23 日，2014 年．

2．小林 真平，離散ガウス曲率負一定曲面について，進展する曲面論-Advances in Surface Theory-；山口大学（山口県・山口市）;12 月 27 日，2013 年．

3．小林 真平，変数分離法による離散サインゴルドン方程式の解の構成法, 九州可積分系セミナー；九州大学（福岡県・福岡市）;2 月 21 日，2014 年．

4．小林 真平，三次元ハイゼンベルグ群内の平均曲率一定曲面について，日本数学会 2012 年度年会；東京理科大学（東京都・新宿区）;3 月 26 日，2012 年．

5．小林 真平，三次元ハイゼンベルグ群内の平均曲率一定曲面について，３月曲面論小研究集会；東京工業大学（東京都・目黒区）;3 月 19 日，2012 年．

6．小林 真平，曲面の幾何学について，談話会；北海道大学（北海道・札幌市）;10 月 3 日，2013 年．

7．小林 真平，曲面のワイエルシュトラス型の表現公式について，幾何学コロキウム；北海道大学（北海道・札幌市）; 7 月 12 日，2013 年

8．小林 真平，可積分系の手法による極小曲面の構成法について，二国間共同研究・極小曲面セミナー； 東京工業大学（東京都・目黒区）;10 月 25 日，2013 年．

9．小林 真平，可積分曲面へのループ群作用，2011 Geometry Symposium (第 58 回幾何学シンポジウム)；山口大学（山口県・山口市）;8 月 29 日，2011 年．

10．小林 真平，ループ群による３次元双曲空間内の平均曲率一定曲面について，名古屋大学（愛知県・名古屋市）;8 月 8 日～10 日，4 回 ×90 分，2012 年．

11．小林 真平，ハイゼンベルグ群内の平均曲率一定曲面について，つくば幾何学小研究会；筑波大学（茨城県・つくば市）;2 月 15 日，2012 年．

12．小林 真平，さまざまな空間の曲面のワイエルシュトラス型の表現公式について，広島幾何学研究集会 2013； 広島大学(広島県・東広島市);10 月 11 日，2013 年．

13．小林 真平，Dressing 作用による可積分系の差分化について，離散可積分系の拡がり；数理解析研究所（京都府・京都市）;8 月 22 日，2012 年．

14．小林 真平，可積分系の手法を用いた双曲空間内の平均曲率一定曲面の構成について，弘前非線形方程式研究会；弘前大学（青森県・弘前市）;12 月 23 日，

2011年.

15. 小林 真平, Harmonic trinoids in complex projective spaces, Isomonodromic deformations and related topics; 首都大学東京（東京都・八王子市）;1月27日, 2012年.

16. Shimpei KOBAYASHI, Minimal surfaces in hyperbolic three-space, Geometry Seminar, Tsinghua University, Beijing, China; August 1, 2011.

17. Shimpei KOBAYASHI, A classification of equivariant constant Gauss curvature and constant mean curvature cylinders, The 4th International Workshop on Nonlinear Mathematical Physics and The 11th National Conference on Integrable Systems; Wuhan Institute of Physics and Mathematics, Wuhan, China; July 27, 2011.

〔その他〕
ホームページ等
https://sites.google.com/site/kobayashishimpeisite/

６．研究組織
(1)研究代表者
小林 真平（KOBAYASHI Shimpei）
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号：40408654