様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月 １９ 日現在

機関番号：１５４０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2011～2014
課題番号：２３７４００５４

研究課題名（和文）微分式系の延長理論と位相構造

研究課題名（英文）Prolongations of differential systems and its topology

研究代表者
澁谷　一博（Shibuya, Kazuhiro）
広島大学・理学（系）研究科（研究院）・准教授
研究者番号：００５６９８３２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：微分式系の幾何学とは多様体上の接空間の部分束の幾何学である。その理論は微分方程式を幾何学的に扱う理論であり、特に複雑な現象を記述する非線形微分方程式に対しても有用である。
本研究では、近年注目されている特異性を持つ偏微分方程式またはその解の研究に対して、上記の微分式系の理論の視点からの研究を行い、基本的、根本的な性質を明らかにした。
また、具体的な偏微分方程式に対しては更なる詳細な研究を行い、解に関する性質なども明らかにした。

研究成果の概要（英文）： A subbundle of the tangent bundle on a manifold are called a differential system. The theory of differential systems is known as a method to study partial differential equations. Partial differential equations are used to describe natural phenomena, therefore to study partial differential equations is important. Especially, to study partial differential equations having singularities is garnering attention. In this situation, we study partial differential equations having singularities from the view point of the theory of differential systems and get fundamental theorems for the equations. We apply the above result to second and third order partial differential equations with one dependent and two independent variables and obtain the characterization of the existence of solutions.

研究分野：微分幾何学

キーワード：微分式系　微分方程式の幾何学

１．研究開始当初の背景

微分式系の幾何学の理論は微分方程式を幾何学的に扱おうとする立場で Cartan, Engel, Goursat, Lie, Monge, Darboux らによって研究されてきた。今日においても微分方程式(特に非線形)を扱う理論としては最高のもののひとつである。微分式系の幾何学とは多様体上の接空間の部分束の幾何学である。そのなかで微分方程式は正準微分式系付きのジェット空間の部分多様体(一般には variety)として捉えられ、そのとき解は積分多様体として現れる。また田中理論においてはジェット空間の正準微分式系に付随する冪零階別リー環の部分環として微分方程式は捉えられる。

ジェット空間はこの理論の中で重要な役割を果たしており、その構造はよく研究されていた。しかし近年、特異性を持つ微分方程式またはその解が研究されるようになり特異性に対応したジェット空間の整備が求められていた。

２．研究の目的

研究背景を踏まえて、微分式系の理論、田中理論を用いて微分方程式の
幾何学的構造の研究を次のように行うことを研究目的とする。

・微分方程式の古典解の研究に対するジェット空間のように幾何学的解に対応する空間を構成し、またその基本的な性質を微分式系の一般論の視点から統一的に研究し明らかにする。

さらに、上記の一般論を踏まえて、特異点付き２独立変数１未知関数２階の偏微分方程式の(高階の)接触同値の下での分類問題の研究や、高階偏微分方程式の幾何学的性質の研究、さらに広く微分幾何学一般への応用を与える事を研究目的とする。

３．研究の方法

幾何学的解に対応する空間の構成に関しては微分式系の延長理論を用いた。
延長理論とは微分式系の積分要素を各点ごとに全て集めたファイバー付き多様体を研究する理論であり、ジェット空間は接触多様体の横断性条件付きの延長として理解できることが知られていた。それに対し、横断性条件無しの延長理論を考えることで幾何学的解に対応する空間の構成を試みた。またその空間のファイバーの位相構造に着目することで既存の結果とは違う視点から理解することをも試みた。

特異点付き２独立変数１未知関数２階の偏微分方程式の(高階の)接触同値の下での分類問題に関しては、方程式に対応する微分式系の構造(派生系、階数、Cauchy 特性系など)を一般的に明らかにすることにより、様々な方程式のクラスを設定し、各クラスごとに分類、解の構成などを詳細に研究した。

４．研究成果

２独立変数１未知関数２階の単独型偏微分方程式は双曲型、放物型、楕円型に分類される。微分式系の理論ではそれらの型はジェット空間内の部分多様体としての微分式系の構造方程式を用いて特徴付けられる。

研究協力者の野田尚廣氏との共同研究において上記概念の一般化として双曲型微分式系、放物型微分式系、楕円型微分式系
が知られていたが、どのような微分式系、微分方程式がそれらの構造をもつかは知られていなかった。

そのような状況の下、申請者は微分式系全体の中で双曲型微分式系、放物型微分式系、楕円型微分式系のどれかを持つための必要十分条件を微分式系の基本的な不変量である派生形の階数、コーシー特性系を用いて特徴づけた。さらにその結果の微分方程式への応用として、２独立変数 m 未知関数 k 階の r 関係式偏微分方程式系が双曲型微分式系、放物型微分式系、楕円型微分式系の構造を持つための必要条件を明らかにした。それにより双曲型微分式系、放物型微分式系、楕円型微分式系の構造をもつ微分方程式の豊富な例を構成することに成功した。また、上記の構造を持つ３階の偏微分方程式に対して解が存在するための条件(可積分条件)を微分式系の理論を用いて具体的に与えることに成功した。また、４階以上の方程式に対しても予想を定式化することが出来た。

次に、２独立変数１未知関数２階の単独型偏微分方程式の中で type-changing 方程式と呼ばれる微分方程式を研究した。type-changing 方程式とは２独立変数１未知関数２階の単独型偏微分方程式で局所的に放物型のまわりに双曲型、楕円型が混在する方程式である。type-changing 方程式は曲面論等の研究の際にも表れる重要なクラスの微分方程式である。申請者は以前から研究協力者の野田尚廣氏と共同研究行っているが、そこではある種の正則性を仮定したクラスの type-changing 方程式に対して２独立変数１未知関数２階の過剰決定系の理論を適用して研究していた。そのような中、今回は同様の正則性を仮定したクラスの type-changing 方程式に対して単独型偏微分方程式の理論の中で重要な不変量である Monge 特性系を対応させ、その Monge 特性系の退化現象を明らかにした。さらにその退化現象と以前の過剰決定系の理論を用いた研究の退化現象が完全に対応することを明らかにすることに成功した。

最後に、微分式系の理論の微分方程式以外への応用として、フィンスラー幾何学における変分問題の研究を行った。微分式系を用いたフィンスラー幾何学の研究は S.S.Chern 氏、P. Griffiths 氏、R. Bryant 氏らによって進められてきた微分幾何学の研究の本流の一つである。　また、フィンスラー幾何学は近年、metric space やタイヒミュラー空間との

関わりなど、大域的な研究が盛んに行われてきているが局所的な性質もまだ明らかになっていない面白い部分が多くあり、
東海大学のサバウソリン氏と共同で微分式系を用いたフィンスラー幾何学の研究を行っている。リーマン幾何学において測地線(接ベクトルが曲線に沿って平行、または直交ベクトルが曲線に沿って平行と言っても同じ)は測地的曲率が 0 で特徴付けられる。フィンスラー幾何学においても接ベクトルが曲線にそって平行な曲線は測地的曲率で特徴付けられることが知られている。一方で、フィンスラー曲面内の直交ベクトルが曲線に沿って平行な曲線がガウス・ボンネ型定理の研究を通じて重要な曲線であることが明らかになってきた。そのような中、フィンスラー曲面内の直交ベクトルが平行な曲線の変分問題的な性質の研究を行った。
その際に直交ベクトルが平行な曲線に対応する“測地的曲率”を定式化し古典的な変分法を用いるとオイラー・ラグランジュ方程式がフィンスラーノルムの複雑さにより非常に複雑になることが分かった。微分式系、外微分式系を用いた変分問題の定式化を用いた所、その複雑さを回避してオイラー・ラグランジュ方程式を解くことが出来、その解はリーマン幾何学的なものとは異なり考えているフィンスラー曲面の曲率に依っていて“測地的曲率”が 0 とは限らないことを明らかにした。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　8　件）

1. 査読有, Sabau, S.V., Shibuya, K. and Shimada, H.: Metric structures associated to Finsler metrics, Publ. Math. Debrecen 84 (2014), no. 1-2, 89-103.
2. 査読有, Sorin V. Sabau, Kazuhiro Shibuya and Gheorghe Pitis : Generalized Finsler structures on closed 3-manifolds, Tohoku Math. J. (2). 66 (2014), no. 3, 321-3533.
3. 査読有, Noda, T. and Shibuya, K. : Rank two prolongations of second-order PDE and geometric singular solutions, Tokyo J. Math. 37 (2014), no. 1, 73-110.
4. 査読有, Yuhei Kunihiro, Sorin V. Sabau and Kazuhiro Shibuya : A Geometrical Perspective on the Insulin Evolution, World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Mathematical, Computational, Physical and Quantum Engineering 2013 Vol:7, No:12.
5. Shibuya, K.: Type-changing PDE and singularities of Monge characteristic systems, 数理解析研究所講究録 1880 (2013), 17-22.
6. 査読有, Sabau, S.V., Shibuya, K. and Shimada, H.: Moving frames on generalized Finsler structures, J. Korean Math. Soc. 2012 Vol 49, No. 6, 1229-1257.
7. 査読有, Noda, T. and Shibuya, K.: Second order type-changing PDE for a scalar function on a plane, Osaka J. Math. 49 (2012), no 1, 101-124
8. 査読有, Noda, T. and Shibuya, K.: On implicit second order PDE of a scalar function on a plane via differential systems, Internat. J. Math. 22 (2011), no. 7, 907-924 DOI No: 10.1142/S0129167X11007069

〔学会発表〕（計　17　件）

1. 澁谷一博 「Fiber structures of prolongations of third order PDEs」『淡路島幾何学研究集会 2015』淡路島, 2015 年 1 月 23 日.
2. Kazuhiro Shibuya「Fiber structures of prolongations of third order PDEs」『Workshop on Singularities, Geometry, Topology and Related Topics』Changchun, China (September,02, 2014).
3. 澁谷一博 「2 変数 3 階過剰決定系に対する involutive の特徴付け」『名古屋大学 大学院多元数理科学研究科　幾何学セミナー』名古屋, 2014 年 2 月 4 日.
4. 澁谷一博 「2 変数 3 階過剰決定系に対する involutive の特徴付け」『淡路島幾何学研究集会 2014』淡路島, 2014 年 1 月 25 日.
5. 澁谷一博 「2 変数 3 階過剰決定系に対する involutive の特徴付け」『合宿セミナー 2013 in 女鹿平 』女鹿平, 2013 年 12 月 6 日.
6. 澁谷一博 「Type-changing PDE and singularities of Monge characteristic systems」『第 60 回幾何学シンポジウム』東京, 2013 年 8 月 27 日.
7. 澁谷一博 「Type-changing PDE and singularities of Monge characteristic systems」『RIMS 研究集会 部分多様体の微分幾何学の深化』京都, 2013 年 6 月 24 日.
8. 澁谷一博 「微分式系による 2 変数 3 階偏微分方程式の解法」『OCU 48』大阪市立大学, 2013 年 6 月 1 日.
9. 澁谷一博 「Jet space, Cartan-Kahler theorem とその周辺 1,2」『TWS14: Seminar on Exterior Differential Systems』東京, 2012 年 11 月 30 日.
10. Kazuhiro Shibuya「Generalized Finsler structures on closed 3-manifolds」『The 47-th Symposium on Finsler Geometry』Kagoshima (23, November, 2012).

11．澁谷一博　「微分式系による 2 変数 3 階偏微分方程式の解法」『合宿セミナー 2012 in 蒜山-- リー群と幾何構造 --』蒜山, 2012 年 11 月 19 日.
12．澁谷一博　「2 階微分方程式の高階への応用 -微分式系の観点から- 」『淡路島幾何学研究集会 2012』淡路, 2012 年 1 月 28 日.
13．澁谷一博　「2 階微分方程式の高階への応用 -微分式系の観点から-」『松江微分幾何学研究会 2011』島根, 2011 年 12 月 16 日.
14．澁谷一博　「2 階微分方程式の高階への応用 -微分式系の観点から-」『岐阜数理科学セミナー』岐阜, 2011 年 11 月 18 日.
15．澁谷一博　「2 階微分方程式の高階への応用 -微分式系の観点から-」『多様体上の微分方程式』金沢, 2011 年 11 月 11 日.
16．澁谷一博　「Rank 4 distributions of type hyperbolic, parabolic and elliptic」『第 58 回幾何学シンポジウム』山口, 2011 年 8 月 29 日.
17．澁谷一博　「Rank 4 distributions of type hyperbolic, parabolic and elliptic」『特異点論とその応用』大分, 2011 年 6 月 1 日.

６．研究組織

(1)研究代表者

澁谷　一博（Shibuya Kazuhiro）
広島大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：00569832